1. Μιγαδικοί

2. Ανάλυση – Συναρτήσεις

1. Προσέχουμε πάντα τα χ για τα οποία ορίζεται μία συνάρτηση ή μία συναρτησιακή σχέση. Αν δεν μας δίνονται πρέπει να τα βρίσκουμε-**Πεδίο ορισμού**.

2. Η **μονοτονία μιας συνάρτησης** αναφέρεται σε κάποιο διάστημα ή σύνολο. Αν γράψουμε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, χωρίς να αναφέρουμε το σύνολο στο οποίο αυτό συμβαίνει, τότε θεωρούμε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της.

3. Για το πεδίο ορισμού της $h(x)=f(g(x))$ λαμβάνουμε υπόψιν ότι $x\in D_g$ ώστε $g(x)\in D_f$.

4. Αν το σύνολο τιμών της $g(x)$ περιέχεται στο πεδίο ορισμού της $f(x)$ τότε το πεδίο ορισμού της $h(x)=f(g(x))$ συμπίπτει με το πεδίο ορισμού της $g(x)$.

5. Αν μας δίνεται ο τύπος $f(g(x))=....$ και γνωρίζουμε την $g(x)$ τότε κάνουμε αντικατάσταση... $g(x)=y \Leftrightarrow x=...$ και βρίσκουμε τον τύπο της f (: $f(y)=....$)

6. Αν μας δίνεται ο τύπος $f(g(x))=....$ και γνωρίζουμε την $f(x)$ τότε στην $f(x)$ βάζουμε όπου χ το $g(x)$ και εξισώνουμε τις δύο ισότητες $f(g(x))=....$ οι οποίες προκύπτουν ….. κατόπιν βρίσκουμε εύκολα την $g(x)$.

7. Αν οι f,g έχουν το **ίδιο είδος μονοτονίας** τότε η σύνθεση της g με την f , δηλαδή η fog, είναι γνησίως αύξουσα. (Απόδειξη εύκολη με βάση τον ορισμό).

8. Αν οι f,g **έχουν διαφορετικό είδος μονοτονίας** τότε η σύνθεση της g με την f , δηλαδή η fog, είναι γνησίως φθίνουσα. (Απόδειξη εύκολη με βάση τον ορισμό).

9. Αν μια συνάρτηση είναι **γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της τότε θα είναι και «1 – 1»** οπότε θα ορίζεται η αντίστροφή της και επίσης : κάθε εξίσωση της μορφής $f(x)=k$ θα έχει το πολύ μια ρίζα στο πεδίο ορισμού της f .

10. Αν μια συνάρτηση είναι **γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ και σε κάποιο x_o του Δ μηδενίζει τότε στο σημείο αυτό θα αλλάζει πρόσημο.** Βρίσκουμε το πρόσημό της χρησιμοποιώντας τον ορισμό της μονοτονίας.

11. Η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της συνάρτησης f ορίζεται μόνο αν η f είναι «1-1» και έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της f. Είναι γνησίως μονότονη, η f^{-1}, στο σύνολο τιμών της f αν η f είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της και έχει το ίδιο είδος μονοτονίας.

Για κάθε y που ανήκει στο σύνολο τιμών της f υπάρχει μοναδικό x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της f ώστε: $f(x)=y \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$, εφόσον ορίζεται η f^{-1}.

- $f(f^{-1}(x))=x$ Για κάθε x που ανήκει στο σύνολο τιμών της f, εφόσον ορίζεται η f^{-1}
- $f^{-1}(f(x))=x$ Για κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της f, εφόσον ορίζεται η f^{-1}

Οι γραφικές παραστάσεις των f,f^{-1}, εφόσον ορίζεται η f^{-1}, είναι συμμετρικές ως προς την διχοτόμο 1ου και 3ου τεταρτημορίου δηλαδή την ευθεία **ψ=χ.**

Το (χ_o , ψ_o) ανήκει στην γραφική παράσταση της f $\Leftrightarrow$ f(χ_o)=ψ_o και εφόσον η f αντιστρέψιμη , $\Leftrightarrow f^{-1}$(ψ_o)=χ_o $\Leftrightarrow$ το (ψ_o , χ_o) ανήκει στην γραφική παράσταση της f^{-1}. Βέβαια απαιτείται και χ_o στοιχείο του πεδίου ορισμού της f .

Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει την ψ=χ σε ένα σημείο τότε και η γραφική παράσταση της f^{-1} θα τέμνει την ψ=χ στο ίδιο σημείο.

Οι γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1} θα τέμνονται μόνο πάνω στην ψ=χ αν η f είναι γνησίως αύξουσα κάτι που δεν ισχύει αν η f δεν είναι γνησίως αύξουσα.

12. Αν ένας αριθμός **κ ανήκει στο σύνολο τιμών** μιας συνάρτησης f τότε η εξίσωση $f(x)=k$ θα έχει ρίζα στο πεδίο ορισμού της f, **υπάρχει χ_o** στο πεδίο ορισμού της f ώστε: $f(x_o)=k$

13. Από την ισότητα $f(\alpha)=f(\beta)$ **μπορούμε να συμπεράνουμε α = β** , εφόσον γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση f είναι «1-1» ή γνησίως μονότονη στο σύνολο όπου υπάρχουν τα α, β.

14. Όταν μια συνάρτηση δεν είναι «1-1» τότε υπάρχουν α, β στο πεδίο ορισμού της για τα οποία ισχύει
$f(\alpha)=f(\beta)$ ενώ α $\neq$ β.

15. Αν το $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)$ είναι ένας θετικός ή αρνητικός αριθμός τότε κοντά στο x_o οι τιμές της συνάρτησης $f(x)$ θα είναι θετικοί ή αρνητικοί αριθμοί αντίστοιχα, μια σημαντική βοήθεια όταν θέλουμε να απαλείψουμε απόλυτα ή να κάνουμε Bolzano ή ……
Παρόμοια συμπεράσματα έχουμε και στις περιπτώσεις που $x\to\pm\infty$, το όριο της συνάρτησης είναι $\pm\infty$

16. Αν το $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)$ υπάρχει και είναι αριθμός και η συνάρτηση έχει τιμές , κοντά στο χ_o , θετικές ή 0 τότε $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)\geq 0$ (**προσοχή μπορεί να είναι και 0 το όριο ακόμη και αν $f(x)>0$ κοντά στο χ_o**).

17. Προσοχή!!! Μπορούμε να γράφουμε $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=f(x_o)$ μόνον όταν γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο χ_o. Όταν για μια συνάρτηση, (του βιβλίου σας) , γνωρίζουμε τον τύπο της ασυνέχεια ενδεχομένως να έχουμε μόνο στα σημεία που αλλάζει ο τύπος της. Αν δεν γνωρίζουμε τον τύπο της συνάρτησης τα συμπεράσματά μας , για τη συνέχεια, θα προκύπτουν μόνο από τα δεδομένα.

18. Όταν μας δίνεται ένα όριο μιας παράστασης, που περιέχει μια συνάρτηση $f(x)$ και μας ζητείται ένα άλλο όριο μιας διαφορετικής παράστασης που περιέχει την $f(x)$, μπορούμε να θέτουμε συνάρτηση $g(x)$ την παράσταση της οποίας γνωρίζουμε το όριό της , κοντά στο χ_o , να λύνουμε , προσέχοντας τους περιορισμούς, ως προς $f(x)$ και τέλος να αντικαθιστούμε την $f(x)$ στην δεύτερη παράσταση. Προσοχή!!! Η συνάρτηση $g(x)$ δεν ορίζεται στο χ_o . Το $\lim\limits_{x\to x_o} g(x)$ ισούται με το όριο που σας δίνεται.

19. Όταν μας δίνεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο χ_o τότε μας δίνονται τα όρια:
$\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=f'(x_o)$ καθώς και το $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=f(x_o)$, αφού η συνάρτηση θα είναι και συνεχής.

20. Όταν μας δίνεται ότι η f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ψ=αχ+β τότε μας δίνονται τα όρια: $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(\alpha x+\beta))=0$ (**ορισμός**) $\Leftrightarrow$ $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\alpha$ και $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\alpha x)=\beta$ (**πρόταση**).

21. Αν γνωρίζουμε ότι $g(x)\le f(x)$ κοντά στο x_o και $\lim_{x\to x_o}g(x)=+\infty$ τότε και με δεδομένο ότι θα ισχύει $g(x)\le f(x)<+\infty$ το συμπέρασμά μας , από το Κ.Π. θα είναι ότι $\lim_{x\to x_o}f(x)=+\infty$. Παρόμοιο συμπέρασμα θα έχουμε και για το $-\infty$.

22. Προσοχή!!! **Δεν υπάρχουν** τα όρια $\lim_{x\to\pm\infty}\eta\mu x$ και $\lim_{x\to\pm\infty}\sigma\upsilon\nu x$. Σε περίπτωση που τα συναντάμε σε κάποια παράσταση χρησιμοποιούμε το Κ.Π. λαμβάνοντας υπόψιν μας τις ιδιότητες: $|\eta\mu x|\le 1$, $|\sigma\upsilon\nu x|\le 1$, $|\eta\mu x|\le|x|$ για κάθε χ. Η ισότητα στην **τελευταία** ανίσωση ισχύει μόνο στο 0.

23. Αν σε κάποια συνάρτηση **δεν μπορούμε να βρούμε απευθείας την τιμή της στο x_o** ενδεχομένως να χρειάζεται να υπολογίσουμε το όριό της στο x_o. Αν έχουμε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο x_o , τότε η τιμή της θα συμπίπτει με το όριό της. Αν f συνεχής στο x_o τότε: $f(x_o)=\lim_{x\to x_o}f(x)$.

24. Αν έχουμε ζητούμενο : « να δείξετε ότι υπάρχει x_o ώστε $f(x_0)=k$ ή $f'(x_0)=k$ …» Ενδεχομένως να χρειάζεται μια απλή επίλυση εξίσωσης, αν όχι: μήπως προκύπτει άμεσα από τα δεδομένα; Αν όχι: **Θεωρήματα: Bolzano , Rolle , θεώρημα ενδιάμεσων τιμών, θεώρημα μέσης τιμής, Fermat, αν όχι: σύνολο τιμών αν όχι: ο θεός βοηθός!!**

25. Αν έχουμε άσκηση με εξίσωση εφαπτομένης:
Είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε το σημείο επαφής $(x_o, f(x_o))$.
Αν δεν δίνεται ή δεν προκύπτει από κάποιο δεδομένο είναι καλό να ξεκινάμε υποθέτοντας «έστω $(x_o, f(x_o))$ το σημείο στο οποίο εφάπτεται η ευθεία η οποία….»
Μην ξεχνάμε ότι η εφαπτομένη ευθεία έχει συντελεστή διεύθυνσης $f'(x_o)$ και εξίσωση $y-f(x_o)=f'(x_o)(x-x_o)$.

3. Διαφορικός λογισμός

26. Πρόσημο συνάρτησης ή παραγώγων της - Απόδειξη ανισώσεων.

Α. Επίλυση ανίσωσης: Μπορεί το πρόσημο να προκύπτει άμεσα από την επίλυση μιας εύκολης ανίσωσης ή από τα δεδομένα της άσκησης. **Μην ξεχνάμε το πρόσημο ενός τριωνύμου**.

Β. Χρήση Bolzano: Αν η συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα διάστημα και $\neq$ **0** τότε θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα αυτό. Το πρόσημό της μπορεί να προκύψει αν γνωρίζουμε ή μπορούμε να βρούμε κάποια τιμή της συνάρτησης στο διάστημα αυτό, διαφορετικά απλά διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Γ. Χρήση μονοτονίας: Αν η συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη και κάπου μηδενίζει στο σημείο αυτό αλλάζει πρόσημο **Παράδειγμα:** Αν f γνησίως αύξουσα στο R και $f(x_o)=0$ τότε: για κάθε $x\in(-\infty, x_o)$ ισχύει: $x<x_o \Leftrightarrow f(x)<f(x_o)\Leftrightarrow f(x)<0$ και για κάθε $x\in(x_o, +\infty)$ ισχύει: $x>x_o \Leftrightarrow f(x)>f(x_o)\Leftrightarrow f(x)>0$

Δ. Χρήση Θ.Μ.Τ. : Παράδειγμα: Αν η f κυρτή στο IR και $f(0)=0$ βρείτε το πρόσημο της $g(x)=f(x)-xf'(x)$ Απάντηση: Αν $x<0$ στο διάστημα [χ , 0] ισχύει το

Θ.Μ.Τ. οπότε υπάρχει x_o μεταξύ του χ και του 0 ώστε: $f^/(x_o) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)}{x}$.
Στο σημείο αυτό χρησιμοποιούμε τη μονοτονία της $f^/$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα αφού f κυρτή στο R ως εξής: $x<x_o<0$ άρα $f^/(x) < f^/(x_o) < f^/(0)$ $\Leftrightarrow$
$f^/(x) < \frac{f(x)}{x} < f^/(0)$ πολλαπλασιάζουμε την πρώτη ανισότητα με το αρνητικό χ , αλλάζοντας τη φορά της : $xf^/(x) > f(x)$ επομένως: $g(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty,0)$.
Με τον ίδιο τρόπο αν $x>0$ θα συμπεράνουμε ότι: $g(x) < 0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$.

Ε. Χρήση ακροτάτων: Αν η συνάρτηση έχει ελάχιστη τιμή έναν αριθμό κ τότε όλες οι τιμές της θα είναι μεγαλύτερες από τον αριθμό αυτό. Αν η συνάρτηση έχει μέγιστη τιμή έναν αριθμό κ τότε όλες οι τιμές της θα είναι μικρότερες από τον αριθμό αυτό.

ΣΤ. Χρήση κυρτότητας: Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ και Α$(x_o, f(x_o))$ ένα τυχαίο σημείο της με x_o ε Δ τότε η γραφική της παράσταση της f βρίσκεται πιο πάνω από την εφαπτομένη της στο σημείο Α. Αυτό είναι ισοδύναμο με την ανίσωση: $f(x) \geq y$ για κάθε $x \in$ Δ, με $y = f^/(x_o(x-x_o) + f(x_o)$ Δηλαδή:
$f(x) \geq f^/(x_o(x-x_o) + f(x_o)$ για κάθε x $\in$ Δ, η ισότητα ισχύει μόνο στο σημείο επαφής δηλαδή για $x=x_o$.
Ομοίως αν η f είναι κοίλη σε ένα διάστημα Δ: $f(x) \leq f^/(x_o(x-x_o) + f(x_o)$ για κάθε x $\in$ Δ, η ισότητα ισχύει μόνο στο σημείο επαφής δηλαδή για $x=x_o$.

Ζ. Το πρόσημο του ορίου: Προσοχή!!! Αυτό δίνει το πρόσημο της συνάρτησης **μόνο κοντά στο x_o**.

Η. Χρήση συνόλου τιμών: Το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης μας δείχνει ακριβώς ποιες είναι οι τιμές της συνάρτησης οπότε ενδεχομένως να προκύπτει και το πρόσημό της.

27. Όταν σε κάποια άσκηση **μας δίνεται μια ανισότητα** η οποία ισχύει για κάθε τιμή της μεταβλητής που περιέχει τότε:
Α. Η ανισότητα μπορεί να δίνεται για να χρησιμοποιηθεί για την απόδειξη κάποιου ζητούμενου, π.χ. την εύρεση της μονοτονίας μιας συνάρτησης, την εύρεση μιας άλλης ανισότητας, …..
Β. Η ανισότητα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να υπολογιστεί κάποιο όριο με τη βοήθεια του κριτηρίου παρεμβολής. ($f^2(x) + g^2(x) \leq x^4$ για κάθε χ τότε f, g συνεχείς , παραγωγίσιμες στο 0;)
Γ. Η ανισότητα μπορεί να χρησιμοποιηθεί μαζί με την ιδιότητα των ορίων: Αν τα όρια των f, g στο x_o υπάρχουν και είναι αριθμοί και οι συναρτήσεις κοντά στο x_o είναι άνισες τότε και τα όριά τους θα είναι ομοιοτρόπως άνισα.
Δ. **Η ανισότητα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την απόδειξη ότι μια συνάρτηση έχει ελάχιστο ή μέγιστο σε ένα εσωτερικό σημείο ενός διαστήματος στο οποίο αυτή είναι παραγωγίσιμη οπότε ….. FERMAT**.

28. Όταν θέλουμε να δείξουμε ότι **μια συνάρτηση είναι σταθερή, σε ένα διάστημα**, μπορούμε, εφόσον γίνεται, να δείξουμε **ότι είναι παραγωγίσιμη και ότι έχει παράγωγο 0** . Αν θέλουμε να δείξουμε ότι **δύο συναρτήσεις είναι ίσες σε ένα διάστημα** , μπορούμε, εφόσον γίνεται, να δείξουμε ότι **η διαφορά τους είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση με παράγωγο 0**, οπότε η διαφορά τους θα είναι c , κατόπιν δείχνουμε ότι το c είναι 0.

29. Για την απόδειξη της ύπαρξη μιας τουλάχιστον ρίζας κάποιας εξίσωσης ή κάποιου x_o :
Α. Απλά λύνουμε την εξίσωση. **Προφανής λύση**. **Προκύπτει** άμεσα από τα δεδομένα.

Β. Bolzano σε ένα διάστημα. ($f(x_o)=0$) ή **ενδιάμεσων τιμών** ή **σύνολο τιμών**($f(x_o)=k$)

Γ. Rolle σε ένα διάστημα. ($f'(x_o)=0$)

Δ. Θ.Μ.Τ. σε ένα διάστημα. ($f'(x_o)=k$)

Ε. Fermat , εφόσον διαπιστώνεται η ύπαρξη ακρότατου. ($f'(x_o)=0$)

30. Για την απόδειξη της μοναδικότητας ρίζας κάποιας εξίσωσης ή κάποιου x_o:
Α. Αν έχουμε λύσει την εξίσωση τότε προκύπτει άμεσα.
Β. Με τη βοήθεια της μονοτονίας, «1-1»
Γ. Με τη βοήθεια του **Rolle** , σε **άτοπο.**

31. Κάθε συνάρτηση f συνεχής στο [α , β] **θα έχει ελάχιστη και μέγιστη τιμή**.
Προσοχή έχουμε τοπικά ακρότατα και στα άκρα.
Για να είναι συνεχής η f στο [α , β] δεν απαιτείται συνέχεια στα α , β: πρέπει να είναι συνεχής στο (α , β) και $\lim_{x\to\alpha^+} f(x)=f(a)$, $\lim_{x\to\beta^-} f(x)=f(\beta)$.

32. Για να δείξουμε ότι η συνάρτηση f **δεν έχει** τοπικό ή ολικό ακρότατο σε ένα **ανοικτό** διάστημα (α , β) αρκεί να δείξω ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο (α , β) ή , εφόσον γνωρίζουμε, ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο (α , β) να φτάσουμε σε άτοπο με την υπόθεση ότι έχουμε ακρότατο στο x_o ε (α , β) οπότε από Fermat $f'(x_o)=0$. Με τον ίδιο τρόπο σκεφτόμαστε και για σημείο καμπής.

33. Μια συνάρτηση γνησίως μονότονη στο [α , β] έχει ελάχιστο και μέγιστο στα α , β.

Ολοκληρωτικός κεφάλαιο 3

Τρόποι Υπολογισμού Ολοκληρωμάτων
1. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΟΥ ΕΡΓΑΖΟΜΑΣΤΕ ΜΕ ΑΛΛΑΓΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ
1η Περίπτωση

Μορφή	Αντικατάσταση	Αποτέλεσμα
$I=\int f'(x)f^{\nu}(\chi)dx, \nu\neq -1$	u=f(x) οπότε du=f ′(x)dx	$I=\int u^{\nu}du=\frac{u^{\nu+1}}{\nu+1}+c$
$I=\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$	u=f(x) οπότε du=f ′(x)dx	$I=\int \frac{1}{u}du=\ln\lvert u\rvert+c$
$I=\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx$	u=f(x)	$I=\int \frac{1}{\sqrt{u}}du=2\sqrt{u}+c$
$I=\int \eta\mu f(x)f'(x)dx$	u=f(x)	$I=\int \eta\mu u du=-\sigma\upsilon\nu u+c$
$I=\int \sigma\upsilon\nu f(x)f'(x)dx$	u=f(x)	$I=\int \sigma\upsilon\nu u du=\eta\mu u+c$
$I=\int e^{f(x)}f'(x)dx$	u=f(x)	$I=\int e^{u}du=e^{u}+c$

Όλες οι παραπάνω περιπτώσεις μπορούν να υπολογιστούν και απευθείας με εύρεση αρχικής(παράγουσας)

Π.χ $I=\int f'(x)f^{\nu}(\chi)dx=\int\left(\frac{1}{\nu+1}f^{\nu+1}(x)\right)'dx=\frac{1}{\nu+1}f^{\nu+1}(x)+c$

2η Περίπτωση (Ρητή συνάρτηση)

Αν $I=\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, όπου P και Q πολυώνυμα του χ τότε:

- Αν P(x)=Q′(x) τότε αναγόμαστε σε προηγούμενα Περίπτωση 1 Μορφή 2
- Αν P(x)$\neq$Q′(x) τότε :
  1. Αν Βαθμός P(x) <Βαθμός Q(x) τότε κάνουμε ανάλυση του κλάσματος σε άθροισμα κλασμάτων.
  2. Αν Βαθμός P(x) $\geq$Βαθμός Q(x) τότε εκτελούμε τη διαίρεση P(x):Q(x) οπότε P(x)=Π(χ)Q(x)+Y(x)$\Leftrightarrow$ $\frac{P(x)}{Q(x)}=\Pi(x)+\frac{Y(x)}{Q(x)}$

<u>3η Περίπτωση</u>

- Αν $I=\int P(e^{\alpha x})dx$ θέτουμε u=e^{αx}
- Αν $I=\int P(\ln \alpha x)dx$ θέτουμε u=lnαx

<u>4η Περίπτωση</u>

Αν $I=\int P(x)\sqrt{ax+\beta}dx$ όπου P(x) πολυωνυμική συνάρτηση : Θέτουμε u=αx+β ή $u=\sqrt{ax+\beta}$

<u>5η Περίπτωση</u>

- Αν $\mathrm{I}=\int \eta\mu^{2\nu}xdx$ ή $\mathrm{I}=\int \sigma\upsilon\nu^{2\nu}xdx$ ή $\mathrm{I}=\int \eta\mu^{2\nu}x\sigma\upsilon\nu^{2\nu}xdx$ τότε υποβιβάζουμε τους εκθέτες με τους τύπους αποτετραγωνισμού : $\eta\mu^2x=\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{2}$, $\sigma\upsilon\nu^2x=\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2x}{2}$
- Αν $\mathrm{I}=\int \eta\mu(kx)\eta\mu(\lambda x)dx$ ή $\mathrm{I}=\int \sigma\upsilon\nu(kx)\sigma\upsilon\nu(\lambda x)dx$ ή $\mathrm{I}=\int \eta\mu(kx)\sigma\upsilon\nu(\lambda x)dx$

  Μετατρέπουμε τα γινόμενα σε αθροίσματα με τύπους που υποχρεωτικά δίδονται.

2.ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΟΥ ΕΡΓΑΖΟΜΑΣΤΕ ΜΕ ΚΑΤΑ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

Καλύπτεται από τις περιπτώσεις του βιβλίου

3. ΤΙ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΠΡΟΣΕΧΩ ΣΤΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

1 Το αόριστο ολοκλήρωμα $\int f(x)dx$ είναι το **σύνολο των συναρτήσεων** που αν τις παραγωγίσουμε δίνουν την συνάρτηση $f(x)$: $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$

2 **Το ορισμένο ολοκλήρωμα** $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ **είναι ο αριθμός** $G(\beta)-G(\alpha)$**,** G παράγουσα της **συνεχούς *f(x)*** .

3 **Η συνάρτηση** $\int_a^x f(t)dt$ **είναι παράγουσα της συνεχούς** $f(t)$**:** $\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x)$

Είναι συνάρτηση με μεταβλητή **το χ** η οποία πρέπει να παίρνει τιμές **στο ίδιο διάστημα με το α** και στο οποίο διάστημα η $f(t)$ ορίζεται και είναι συνεχής.

<u>Να μην συγχέουμε την μεταβλητή του ορισμένου ολοκληρώματος t με την μεταβλητή της συνάρτησης ολοκλήρωμα χ Η κάθε μία για την άλλη είναι σταθερή – ανεξάρτητη. Το t παίρνει τιμές μεταξύ του α και του χ. Προσοχή! Οι μεταβλητές μπορεί να δοθούν και ανάποδα!</u>

4 Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος

Α. Αν παρατηρούμε ότι στο ολοκλήρωμα **υπάρχει μια συνάρτηση και η παράγωγός της** τότε **μάλλον** χρειάζεται να κάνουμε **αντικατάσταση.**

Β. Αν παρατηρούμε ότι υπάρχει παράσταση της μορφής $f'(x)g(x)$ τότε **μάλλον** χρειάζεται να κάνουμε **κατά παράγοντες**.

Γ. Αν παρατηρούμε παράσταση της μορφής $f(g(x))$ τότε **μάλλον** χρειάζεται **αντικατάσταση** το $g(x)$

Δ. Να μην ξεχνάμε, στο ορισμένο ολοκλήρωμα, **να αλλάζουμε τα όρια ολοκλήρωσης** όταν κάνουμε αντικατάσταση.

Ε. Να μην ξεχνάμε, στο αόριστο ολοκλήρωμα, να αντικαθιστούμε, στο τέλος, το ψ που αντικαταστήσαμε στη μέθοδο αντικατάστασης.

Στ. Να μην ξεχνάμε, στο αόριστο ολοκλήρωμα, να βάζουμε το c στο τέλος του υπολογισμού του.

Ζ. Να μην ξεχνάμε το **απόλυτο στη συνάρτηση** όταν υπολογίζουμε εμβαδό χωρίου και βέβαια ότι το εμβαδό είναι θετικός αριθμός!!

Η. Η ανισότητα του ορισμένου ολοκληρώματος: Χρησιμοποιείται όταν έχουμε ορισμένο ολοκλήρωμα σε ένα διάστημα [α , β] ή σε διάστημα [α , χ] με χ>α.
$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$ **εφόσον** $f(x) \geq 0$ για κάθε χ ε [α , β]. Αν όμως υπάρχει έστω και ένα χ_0 για το οποίο $f(x_0) > 0$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$

Παράδειγμα: Να βρεθεί το όριο $\lim_{x\to+\infty}\int_1^x e^{t^2}dt$

Απάντηση: Η συνάρτηση $f(t) = e^{t^2}$, t∈ R είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(t) = 2te^{t^2}$, t ∈ R…… έχει ελάχιστη τιμή την $f(0) = 1$ οπότε: $f(t) \geq 1$ για κάθε , t ∈R. Με τη βοήθεια της ανισότητας του ολοκληρώματος στο διάστημα [1 , x] με x>1
έχουμε: $\int_1^x f(t)dt \geq \int_1^x 1dt \Leftrightarrow \int_1^x f(t)dt \geq 1(x-1) \Leftrightarrow \int_1^x e^{t^2}dt \geq (x-1)$ και εφόσον
$\lim_{x\to+\infty}(x-1) = +\infty$ θα είναι $\lim_{x\to+\infty}\int_1^x e^{t^2}dt = +\infty$.

5 **Ισχύει :** $f(\beta) - f(a) = \int_a^{\beta} f'(x)dx$. Χρήσιμο για τον υπολογισμό **τιμών** της συνάρτησης f όταν είναι γνωστός ο ρυθμός μεταβολής της f, οπότε **μπορεί να υπολογιστεί το** $\int_a^{\beta} f'(x)dx$**.**

6 **Ισχύει :** $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt$. Χρήσιμο για τον υπολογισμό **της συνάρτησης** f όταν είναι γνωστός ο ρυθμός μεταβολής της f και κάποια τιμή της $f(a)$ οπότε **μπορεί να υπολογιστεί το** $\int_a^x f'(t)dt$.

7 !!!!! Για τον υπολογισμό **του πεδίου ορισμού** , (**όταν αυτό μας ζητείται ή δεν δίνεται**), της συνάρτησης $\int_{g(x)}^{h(x)} \phi(x)f(t)dt$ και εφόσον η f είναι συνεχής σε ένωση δύο διαστημάτων Δ_1 , Δ_2 , οι συναρτήσεις ϕ, h, g παραγωγίσιμες στα πεδία ορισμού τους

πρέπει να λάβουμε υπόψιν μας τους εξής περιορισμούς για το χ:
Το χ να ανήκει στα πεδία ορισμού των ϕ, h, g και συγχρόνως $h(x), g(x)$ να ανήκουν και τα δύο στο Δ_1 **ή και τα δύο στο** Δ_2.
Κατόπιν επιλέγοντας **κατάλληλο (;) αριθμό α** θα πρέπει να μετασχηματίσουμε την συνάρτηση :

$\int_{g(x)}^{h(x)} \phi(x) f(t)dt = \phi(x)\int_{\alpha}^{h(x)} f(t)dt - \phi(x)\int_{a}^{g(x)} f(t)dt$. Ποια θα είναι η παράγωγός της;

Καλή επιτυχία.

Κονταξάκης Γιάννης