Κεφάλαιο 4

4. Θεώρημα Rolle

ΒΑΣΙΚΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ –Θ.Rolle

Πρόταση 1 : *«Μεταξύ δυο ριζών μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f, υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα της εξίσωσης f΄(x)=0»*

ii) *«Μεταξύ δυο διαδοχικών ριζών της συνάρτησης f ΄, υπάρχει μία το πολύ ρίζα της εξίσωσης f(x)=0»*

Απόδειξη

i) Έστω ρ_1,ρ_2 (ας είναι $\rho_1<\rho_2$) δύο ρίζες της συνάρτησης f
f συνεχής στο $[\rho_1,\rho_2]$
παραγωγίσιμη στο (ρ_1,ρ_2)
$f(\rho_1)=f(\rho_2)=0$ άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις Rolle , δηλαδή στο διάστημα (ρ_1,ρ_2) υπάρχει ρίζα της εξίσωσης f΄(x)=0

ii) Εστω ρ_1 ,ρ_2 ($\rho_1<\rho_2$) δύο διαδοχικές ρίζες της f΄.
Αυτό σημαίνει ότι μεταξύ των ρ_1 και ρ_2 , δεν υπάρχει άλλη ρίζα της f΄.
Έστω ότι η f έχει δύο ρίζες στο (ρ_1,ρ_2) , τότε σύμφωνα με την πρόταση 1 η f΄θα έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (ρ_1,ρ_2) που είναι άτοπο.
Αρα η f έχει μία το πολύ ρίζα μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της f΄

Πρόταση 2 *: «Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει f΄(χ) $\neq$ 0 για κάθε x$\in$R . Να δείξετε ότι είναι 1-1.»*

Απόδειξη

Έστω ότι η f δεν είναι 1-1 , τότε θα υπάρχουν $\alpha,\beta\in R$ με
$\alpha\neq\beta$ ώστε $f(\alpha) = f(\beta)$
Για την f ισχύουν οι προυποθέσεις του Θ.Rolle αφού:
Η f συνεχής στο [α,β] ως παραγωγίσιμη
Είναι παραγωγίσιμη στο (α,β)
Ισχύει $f(\alpha) = f(\beta)$
Αρα σύμφωνα με θ.Rolle η εξίσωση f΄(x)=0 έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α,β), που είναι άτοπο , αφού f΄(χ) $\neq$ 0 για κάθε x$\in$R. Οπότε η f είναι 1-1

Πρόταση 3 *: «Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει f ΄(χ) $\neq$ 0 για κάθε x$\in$R . Να δείξετε ότι η f έχει το πολύ μία ρίζα.»*

Απόδειξη

Εστω ότι η f έχει δύο ρίζες : $f(\rho_1)=f(\rho_2)=0$ άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις Rolle , δηλαδή στο διάστημα (ρ_1,ρ_2) υπάρχει ρίζα της εξίσωσης f΄(x)=0 άτοπο

Πρόταση 4 *: «Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει f ΄΄(χ) $\neq$ 0 για κάθε x$\in$R . Να δείξετε ότι η f έχει το πολύ μία ρίζα.»*

Απόδειξη

Έστω ότι η f έχει τρείς ρίζες τότε : $f(\rho_1)=f(\rho_2)=f(\rho_3)=0$ τότε
Θ.Rolle στο $[\rho_1,\rho_2]$ υπάρχει ξ_1 ώστε $f'(\xi_1)=0$
Θ.Rolle στο $[\rho_2,\rho_3]$ υπάρχει ξ_2 ώστε $f'(\xi_2)=0$
Θ.Rolle στο $[\xi_1,\xi_2]$ υπάρχει ξ ώστε $f''(\xi)=0$ άτοπο

Πρόταση 3

i) Κάθε **πολυωνυμική εξίσωση f(χ)=0** με πραγματικούς συντελεστές , νιοστού βαθμού έχει το πολύ ν πραγματικές ρίζες.

ii) Αν μία **πολυωνυμική εξίσωση f(χ)=0** με πραγματικούς συντελεστές έχει κ το πλήθος διαφορετικές πραγματικές ρίζες , τότε η εξίσωση f΄(χ)=0 έχει κ-1 το πλήθος τουλάχιστον πραγματικές ρίζες.

Πρόταση 4. Κάθε εξίσωση της μορφής f(x)=0 με f(x) πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

Παρατήρηση 1 !! Το θεώρημα **BOLZANO** μας εξασφαλίζει μία τουλάχιστο ρίζα σε διάστημα (α,β) για την εξίσωση f(x) , ενώ το θεώρημα **ROLLE** μας εξασφαλίζει μία τουλάχιστο ρίζα στο διάστημα (α,β) , για την εξίσωση $f'(x)=0$.

Παρατήρηση 2 !! Μία εξίσωση f(x)=0 έχει το πολύ μία ρίζα σε διάστημα Δ αν η f(x) είναι γνήσια μονότονη στο Δ.

Κατηγορίες -Ασκήσεων

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ → 1

Ασκήσεις στις οποίες μας ζητάνε να δείξουμε:

1) **‘Οτι εφαρμόζεται το Θ.Rolle για μια συνάρτηση f σ’ ένα διάστημα [α,β]**
2) **ή μας ζητείται να βρούμε το χ_o έτσι ώστε $f'(x_o)=0$.**
3) **ή μας ζητάνε να αποδείξουμε ότι υπάρχει σημείο του διαγράμματος μιας συνάρτησης στο οποίο η εφαπτόμενη είναι παράλληλη προς τον άξονα χχ’(Τρεις ταυτόσημες διατυπώσεις)**
4) **Να βρεθούν οι παράμετροι ώστε να εφαρμόζεται το Θ.Rolle**

<u>ΤΙ ΚΑΝΟΥΜΕ</u> Εξετάζουμε αν ισχύουν οι συνθήκες του Θ.Rolle. Ακολούθως λύνουμε (αν μας ζητάνε να βρούμε το x_0) την εξίσωση f΄(xo)=0 και ελέγχω αν οι λύσεις ανήκουν στο (α,β).

Παράδειγμα : Άσκηση 1 Βιβλίου ά ομάδα σελ 249

Προσέξτε γιατί μπορεί να **μην** ισχύουν οι συνθήκες του Rolle και να υπάρχει χ_o ώστε $f'(x_0)=0$. Ακόμα λοιπόν και αν δεν ισχύουν οι συνθήκες πρέπει να λύσω την εξίσωση $f'(x_0)=0$ και να δω αν κάποια ρίζα ανήκει στο (α,β).

Αντιπαράδειγμα :

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & ,-3\le x\le 1 \\ 2x & ,\ 1<x\le 5\end{cases}$$ Υπάρχει $x_0 \in(-3,5)$ $f'(x_0) = 0$

Λύση

Ξέρουμε ότι το Θ.Rolle **δεν εφαρμόζεται σε ένωση διαστημάτων** αλλά **μόνο σε κλειστό διάστημα**. Εδώ θα εφαρμοστεί στο [-3,1]U(1,5] = [-3,5] (κλειστό). Μην μπερδευόμαστε λοιπόν, αν η ένωση των διαστημάτων που θα δουλέψουμε δίνει κλειστό διάστημα, **δεν υπάρχει πρόβλημα.** Τώρα η f δεν είναι συνεχής άρα ούτε και παραγωγίσιμη στο 1 άρα δεν ισχύουν οι συνθήκες του Θ.Rolle στο [-3,5] όμως:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & ,-3\le x<1 \\ 2 & ,\ 1<x\le 5\end{cases}$$

και άρα η εξίσωση $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x=0 \Leftrightarrow x=0$, έχει λύση που ανήκει στο (-3,1), υποσύνολο του (-3,5) παρόλο που δεν ισχύουν οι συνθήκες του Θ. ROLLE

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ → 2 Εύρεση παραμέτρων ώστε να εφαρμόζεται το Θ.Rolle.

<u>ΤΙ ΚΑΝΟΥΜΕ</u> Ουσιαστικά εύρεση παραμέτρων ώστε για την f να έχουμε οτι είναι συνεχής, παραγωγίσιμη σε κάποια διαστήματα και να ισχύει $f(x_1)=f(x_2)$. Προσέξτε να γίνει επαλήθευση και των $3^{ων}$ συνθηκών.

Παράδειγμα

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & ,-3\le x\le 1 \\ kx+\lambda & ,1<\chi\le 5\end{cases}$$ Να βρεθούν τα κ, λ ώστε να ισχύει το Θ.Rolle στο [-3,5].

Λύση

- Η f είναι συνεχής στα [-3,1) και (1,5] ως πολυωνυμική.

Ακόμα $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} x^2=1$, $\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(kx+\lambda)=k+\lambda$ άρα κ+λ=1 (1)

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο [-3,1) με $f'(x)=2x$ και στο (1,5] με $f'(x)=κ$ άρα

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}(x+1)=2$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{kx+\lambda-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{kx-k}{x-1}=k$$

άρα κ=2. (2)

Από (1), (2) έχουμε: k=2 και λ=-1.

Παρόλο που έχουμε βρει τους 2 αγνώστους θα συνεχίσουμε για να δούμε αν ισχύει και η 3η συνθήκη για τις τιμές των κ, λ που βρήκαμε. πρέπει να ισχύει: $f(-3)=f(5) \Leftrightarrow (-3)^2=5κ+λ \Leftrightarrow 9=5.2+(-1) \Leftrightarrow 9=9$ ισχύει.

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ → 3 Ασκήσεις στις οποίες μας θέτουν ερωτήματα σχετικά με το πλήθος των ριζών μιας εξίσωσης.

1. Δείξτε ότι η εξίσωση έχει <u>το πολύ</u> κ ρίζες ή δεν έχει πάνω από κ ρίζες ή δεν έχει κ+1 ρίζες.(Οι τρεις τελευταίες φράσεις είναι ταυτόσημες).

<u>ΤΙ ΚΑΝΟΥΜΕ</u>: Δεχόμαστε ότι η εξίσωση έχει μια ρίζα παραπάνω και καταλήγουμε σε άτοπο

<u>Το πολύ</u> μία ρίζα της f

Εάν μας ζητείται να δείξουμε ότι μια συνάρτηση f(x) έχει το πολύ μια ρίζα στο (α,β)τότε:
1. Δείχνουμε ότι είναι 1-1, αν δεν δουλέψει πάμε στο 2
2. Εφαρμόζουμε το θεώρημα του Rolle για την f στο [α,β] θεωρώντας ότι έχει 2 ρίζες στο διάστημα (α,β) και καταλήγοντας σε άτοπο

Παράδειγμα -1 : Η εξίσωση $\chi^{2\nu}=\alpha\chi+\beta$ με α,β πραγματικούς δεν έχει περισσότερες από δύο πραγματικές ρίζες.
Λύση :

Ενέργεια	**Παράδειγμα**
Μεταφέρουμε όλους τους όρους της εξίσωσης σε ένα μέλος	$\chi^{2\nu}-\alpha\chi-\beta=0$
Θεωρούμε συνάρτηση g(x)= α΄μέλος	$g(x)=\chi^{2\nu}-\alpha\chi-\beta$
Δεχόμαστε ότι δεν ισχύει το ζητούμενο άρα η συνάρτηση έχει κ+1 ρίζες	Έστω ότι η g θα έχει 3 άνισες ρίζες $\chi_1<\chi_2<\chi_3$
Θ. Rolle σε καθένα από τα διαστήματα	$g(x_1)=g(x_2)=g(x_3)=0$ άρα ισχύει το Θ.Rolle στα διαστήματα $[\chi_1,\chi_2],[\chi_2,\chi_3]$
Η g'(x) θα έχει μία τουλάχιστον ρίζα σε κάθε διάστημα	Η $g'(x)=2\nu x^{2\nu-1}-\alpha$,έχει από μία ρίζα στα διαστήματα $[\chi_1,\chi_2],[\chi_2,\chi_3]$ Δηλαδή έχει 2 ρίζες.
Βρίσκουμε την g'(x) και δείχνουμε ότι είναι άτοπο να έχει κ τουλάχιστον ρίζες	Η εξίσωση $2\nu x^{2\nu-1}-\alpha=0$ είναι διώνυμη περιττού βαθμού και έχει μία ρίζα . Ατοπο

Παράδειγμα -2
Δείξτε οτι η εξίσωση $\chi^6-6\chi+2=0$, έχει **δύο το πολύ ρίζες** στο διάστημα (-10, 100)
Λύση
Θα δείξω οτι **δεν έχει τρεις** ρίζες.
Έστω η f: $f(x)=x^6-6x+2$ και $\rho_1,\rho_2,\rho_3\in(-10,100)$ με $\rho_1<\rho_2<\rho_3$ και $f(\rho_1)=f(\rho_2)=f(\rho_3)=0$.
(Δηλ. έστω οτι έχουμε 3 ρίζες) Θα εφαρμόσουμε το Θ.Rolle στα διαστήματα $[\rho_1,\rho_2]$ και $[\rho_2,\rho_3]$. Έχουμε:

- Η f συνεχής στα $[\rho_1,\rho_2]$, $[\rho_2,\rho_3]$ ως πολυωνυμική.
- Η f παραγωγίσιμη στα (ρ_1,ρ_2), (ρ_2,ρ_3). $f(\rho_1)=f(\rho_2)=f(\rho_3)=0$ με $f'(\chi)=6x^5-6$. Άρα εφαρμόζεται για την f το Θ.Rolle στα διαστήματα $[\rho_1,\rho_2]$, $[\rho_2,\rho_3]$ και επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1\in(\rho_1,\rho_2)$ και ένα τουλάχιστον $\xi_2\in(\rho_2,\rho_3)$ έτσι ώστε $f'(\xi1)=0$ και $f'(\xi_2)=0$. Δηλαδή η $f'(\chi)=0$ έχει δύο ρίζες , έτσι $6x^5-6=0$ έχει δύο ρίζες (Άτοπο αφου είναι δυώνυμη περιτου βαθμού)

Παρατήρηση (Τρόποι να οδηγηθούμε σε άτοπο)
α) Αν δεν υπάρχει ξ ώστε $f'(\xi)=0$.
β) Υπάρχει ξ με $f'(\xi)=0$ αλλά το ξ δεν ανήκει στο διάστημα μας.
γ) Το Θ.Rolle εφαρμόζεται (αν έχουμε 3 ρίζες) σε δυο διαστήματα άρα πρέπει η f '(x) να έχει δυο ρίζες τουλάχιστον ενώ εμείς έχουμε λιγότερες

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ → 4 **Δείξτε ότι η εξίσωση έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (α,β).**

ΤΙ ΚΑΝΟΥΜΕ:
1.Δοκιμάζουμε το θεώρημα του Bolzano στο [α,β], αν δεν δουλέψει πάμε στο 2
2.Δοκιμάζουμε το θεώρημα του Rolle για την **παράγουσα της** f στο [α,β],αν δεν δουλέψει πάμε στο 3

3.Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της f(A) της f. Αν το $0\in f(A)$,τότε η f έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα .
4. Εντοπίζουμε μία προφανή ρίζα .πχ $f(x)=e^x-x-1$.Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η ρίζα είναι χ=0
5. Εφαρμόζουμε το Θ.Rolle για την G(x) μια αρχική συνάρτηση της f (G΄(χ)=f(x))

Παράδειγμα -1: (Περ-5)
Να δειχτεί οτι η εξίσωση $3αχ^2+2βχ-α-β=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0,1).
Λύση
΄Εστω $f(x)=3αχ^2+2βχ-α-β$.
- Η f είναι συνεχής στο [0,1], ως πολυωνυμική.
- f(0).f(1)=(-α-β).(3α+2β-α-β)=-(α+β).(2α +β)=; άρα **δεν μπορούμε** να εφαρμόσουμε το Θ.Bolzano. Θεωρώ την $g(x)=αχ^3+βχ^2-αχ-βχ$. Η οποία είναι μια παράγουσα –αρχική της f
- Η g είναι συνεχής στο [0,1].
- Η g είναι παραγωγίσιμη στο (0,1) με $g'(x)=3αχ^2+2βχ-α-β$.
- g(0)=0, g(1)=α+β-α-β=0.

άρα ισχύει το Θ.Rolle για την g οπότε υπάρχει $ξ\in(0,1)$: $g'(ξ)=0 \Leftrightarrow f(ξ)=0$. άρα η εξίσωση μας έχει μια τουλάχιστον ρίζα.

Άσκηση Αν $\alpha,\beta\in R_+^*$ να δείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 με $f(x)=12\alpha x^3+12\beta x^2-8\beta x-3\alpha$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0,1).

Παράδειγμα - 3. ΄Εστω μια συνάρτηση f, συνεχής στο διάστημα [α, β]. Αν ισχύει $\int_\alpha^\beta f(t)\,dt=0$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση f (χ)=0 έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα (α, β).

Λύση παραδείγματος 3
Αν G(x) μια αρχική της f(x) θα έχω : $\int_a^\beta f(x)dx=G(\beta)-G(\alpha)=0$

Με θεώρημα του Bolzano για την G(x) θα έχω : $\begin{cases} f(x)\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o[a,\beta] \\ f(a)f(\beta);;;; \end{cases}$
Εφαρμόζω το Θ.Rolle για την παράγουσα της f που είναι η G

$$\begin{cases} G(x)\,\sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\,\sigma\tau o[a,\beta] \\ G(x)\,\pi\alpha\rho\alpha\gamma\omega\gamma\acute{\iota}\sigma\iota\mu\eta\ \ \sigma\tau o\ (a,\beta) \\ G(a)=G(\beta)\ \ \beta\acute{\alpha}\sigma\varepsilon\iota\ \tau\eta\varsigma\,(1) \end{cases}$$
ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle άρα θα υπάρχει χ0 ώστε $G'(x_0)=0 \Rightarrow \begin{cases} G'(x)=f(x) \\ G'(x_0)=f(x_0)=0 \end{cases}$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ → 4 <u>Δείξτε ότι η εξίσωση έχει κ ακριβώς ρίζες διαφορετικές.</u>

<u>ΤΙ ΚΑΝΟΥΜΕ</u>:

α. δείχνουμε ότι έχει κ τουλάχιστον ρίζες(π.χ κ φορές Θ. Bolzano)
β. Δεν έχει περισσότερες από κ ρίζες (Με άτοπο Θ. Rolle)

Για να δείξουμε ότι μια εξίσωση f(x)=0 έχει μία μόνο ρίζα (ακριβώς μία) σε διάστημα Δ, θα δείχνουμε πρώτα ότι έχει μία τουλάχιστο ρίζα στο Δ και στη συνέχεια ότι είναι μοναδική.

Την ύπαρξη της ρίζας μπορούμε να την βρούμε με τους παρακάτω τρόπους:

α) Δουλεύοντας με BOLZANO στο διάστημα που μας δίνεται ή σε διάστημα που βρίσκουμε εμείς.

β) Βλέποντας μήπως υπάρχει προφανής ρίζα.

γ) Δουλεύοντας με τα όρια της στα άκρα του πεδίου ορισμού της αν αυτό είναι ανοικτό διάστημα.

Τη μοναδικότητα της ρίζας μπορούμε να την διαπιστώσουμε με τους παρακάτω τρόπους:

α) Αποδεικνύοντας ότι η f(x) είναι **γνήσια μονότονη**.

β) Χρησιμοποιώντας το θεώρημα ROLLE ως εξής:

Θα υποθέτουμε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει δύο ρίζες $\rho_1 \neq \rho_2$ στο Δ, θα εφαρμόζουμε το θεώρημα ROLLE στο $[\rho_1,\rho_2]$ και θα καταλήγουμε σε άτοπο.

Παράδειγμα -1 Δείξτε οτι η εξίσωση $x^5+5x+1=0$ (1) έχει μια ακριβώς ρίζα στο διάστημα (-1,2)

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση f: $f(x)=x^5+5x+1$ και παρατηρούμε οτι είναι συνεχής στο [-1,2], f(-1)=-5, f(2)=43 οπότε εφαρμόζεται το Θ.Bolzano και επομένως η f έχει μια τουλάχιστον ρίζα ρ στο (-1,2). Θα δείξουμε οτι η εξίσωση **δεν** έχει δύο ρίζες , άρα τελικά έχει μια ρίζα ακριβώς. Έχουμε 2 τρόπους:

1ος: Παρατηρούμε οτι αν η f είχε και δεύτερη ρίζα στο (-1,2), (έστω χ_1 χ_2 οι ρίζες) τότε επειδή είναι παραγωγίσιμη στο [-1, 2] θα ίσχυε το Θ.Rolle στο [x1, x2] υποσύνολο του [-1, 2] και άρα θα υπήρχε $x_0\in(x_1, x_2)$, άρα $x_0\in(-1,2)$ ώστε $f'(x_0)=0$. Όμως $f'(x)=5x^4+5\neq0$; Άρα έχουμε άτοπο στο οποίο καταλήξαμε δεχόμενοι ότι η f έχει και 2η ρίζα στο (-1, 2). Άρα η f έχει μια μόνο ρίζα στο διάστημα αυτό.

2ος: Αφού $f'(x)=5x^4+5=5(x^4+1)>0$ αυτό σημαίνει οτι η f είναι αύξουσα στο R άρα και στο (-1, 2) και άρα έχει ακριβώς μια ρίζα.

Παράδειγμα -2 Έστω η συνάρτηση f: f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3). Δείξτε οτι η εξίσωση f΄(x)=O έχει τρεις ακριβώς ρίζες στο R

Λύση

Παρατηρούμε οτι η εξίσωση f(x)=0 έχει τέσσερις ρίζες τις 0, 1, 2, 3 και επειδή η f είναι παραγωγίσιμη σε καθένα από τα διαστήματα [0, 1], [1, 2], [2, 3] άρα η εξίσωση f΄(x)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα (0, 1), (1, 2), (2, 3) δηλαδή έχει τρεις τουλάχιστον ρίζες. Ακόμα βλέπουμε οτι η f είναι 4ου βαθμού πολυωνυμική συνάρτηση και άρα η f΄(x) είναι 3ου βαθμού δηλαδή έχει τρεις το πολύ πραγματικές ρίζες. Άρα τελικά έχει 3 ακριβώς ρίζες πραγματικές.

Άσκηση 1 Να δείξετε ότι η εξίσωση $(x+1).2^{x+1}-1=0$ έχει μόνο μία ρίζα στο διάστημα $(-1,0)$.

Λύση

Ορίζω τη συνάρτηση $f(x)=(x+1).2^{x+1}-1$

Με Θ.Bolzano έχω: $\left\{\begin{matrix} f(-1)=-1<0 \\ f(0)=2-1=1>0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow f(-1)f(0)<0$ επίσης η f είναι συνεχής στο (-1,0) , άρα σύμφωνα με BOLZANO υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (-1,0)
Για τη μοναδικότητα της ρίζας : Δέχομαι ότι έχει δύο ρίζες και με Θεώρημα Rolle οδηγούμαι σε άτοπο. Πράγματι :
Αν η f έχει δύο ρίζες τότε : $f(\rho_1)=f(\rho_2)=0$, οπότε σύμφωνα με Rolle υπάρχει ξ ώστε f΄(ξ)=0
Αλλά $f'(x)=(x+1)'.2^{x+1}+(x+1)2^{x+1}\ln 2=2^{x+1}(1+(x+1)\ln 2)=0$ άτοπο αφού :
-1<χ<0 ⇔ 0<χ+1<1 από προηγούμενη σχέση f΄(χ)>0

Άσκηση 2 Αν $\alpha \neq 0$ και ν άρτιος να δείξετε ότι η εξίσωση $x^\nu+\alpha^\nu-(x+a)^\nu=0$ έχει μόνο μία ρίζα .

Λύση

Ορίζω τη συνάρτηση $f(x)=x^\nu+\alpha^\nu-(x+\alpha)^\nu$

Παρατηρώ ότι : $f(0)=0^\nu+\alpha^\nu-(0+\alpha)^\nu=0$ άρα μία τουλάχιστον ρίζα είναι η χ=0
Για τη μοναδικότητα της ρίζας : Δέχομαι ότι έχει δύο ρίζες και με Θεώρημα Rolle οδηγούμαι σε άτοπο. Πράγματι :

Εστω ότι η f έχει δύο ρίζες τότε: $f(\rho_1)=f(\rho_2)=0$,οπότε σύμφωνα με Rolle υπάρχει ξ ώστε f΄(ξ)=0

Αλλά $f'(x)=\nu x^{\nu-1}-\nu(x+\alpha)^{\nu-1}(x+\alpha)'=0 \Leftrightarrow \nu x^{\nu-1}=\nu(x+\alpha)^{\nu-1}$

$\Leftrightarrow x^{\nu-1}=(x+\alpha)^{\nu-1} \overset{\nu-1 \, \pi\varepsilon\rho\iota\tau\acute{o}\varsigma}{\Longleftrightarrow} x=x+a \Leftrightarrow a=0$ άτοπο.

Άσκηση 3 Αν $f(x)=xe^x+\ln x-2$ να δείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει μόνο μία ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ → 4

Ασκήσεις που μας ζητάνε να βρούμε κάποιο ξ∈(α,β) ώστε να ισχύει μια σχέση. Παράγουσα (Αρχική) συνάρτηση – Αντιπαραγώγιση

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1

ΤΙ ΚΑΝΟΥΜΕ

Όταν θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο ξ σε διάστημα Δ ώστε να ισχύει κάποια σχέση στην οποία **υπάρχει παράγωγος**, θα μεταφέρουμε όλους τους όρους της σχέσης στο πρώτο μέλος και θα καταλήγουμε σε μία ισότητα της μορφής f(ξ)=0.
Στη συνέχεια θα ορίζουμε τη συνάρτηση f(x), θα βρίσκουμε μία συνάρτηση g(x) για την οποία ισχύει $g'(x)=f(x)$ και θα εφαρμόζουμε το θεώρημα ROLLE για τη g(x) στο διάστημα Δ.

Παράδειμα: Δίνεται μία συνάρτηση φ συνεχής στο [1,2], παραγωγίσιμη στο (1,2) και τέτοια ώστε να ισχύει η σχέση φ(2)-φ(1)=3. Να δείξετε ότι υπάρχει σημείο $\xi \in (1,2)$ τέτοιο ώστε : $\varphi'(\xi) = 2\xi$

Δύση

$\phi'(\xi) = 2\xi \Leftrightarrow \phi'(\xi) - 2\xi = 0$

Ορίζουμε την συνάρτηση f(x)=φ΄(χ)-2χ

Βρίσκουμε την αρχική συνάρτηση της f(x) .την G(x)=φ(x)-x^2 **διότι :**

$G'(x) = (\varphi(x) - x^2)' = \varphi'(x) - 2x$

Εφαρμόζω το Θ.Rolle στο [1,2] για την G(x) $\begin{cases} G(x) \text{ συνεχής στο} [1,2] \\ G(x) \text{ Παραγωγίσιμη στο} (1,2) \\ G(1) = \varphi(1) - 1 \\ G(2) = \varphi(2) - 4 = \varphi(1) + 3 - 4 = \varphi(1) - 1 \end{cases}$

Αρα ισχύουν οι προϋποθέσεις Rolle άρα υπάρχει ξ ∈ (1,2) ώστε : $G'(\xi) = 0$

Αλλα $G'(x) = \varphi'(x) - 2x \Rightarrow G'(\xi) = \varphi'(\xi) - 2\xi = 0 \Leftrightarrow \varphi'(\xi) = 2\xi$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2

<u>ΤΙ ΚΑΝΟΥΜΕ</u>

Όταν θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο ξ σε διάστημα Δ έτσι ώστε να ισχύει κάποια σχέση στην οποία **<u>δεν υπάρχει παράγωγος</u>**, θα μεταφέρουμε όλους τους όρους της σχέσης στο πρώτο μέλος και θα καταλήγουμε σε μία ισότητα της μορφής f(ξ)=0 . Στη συνέχεια θα θεωρούμε τη συνάρτηση f(x),και θα εφαρμόζουμε γι' αυτήν το θεώρημα **BOLZANO** στο διάστημα Δ.

Αν δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα **BOLZANO** θα βρίσκουμε μία συνάρτηση g(x)

για την οποία ισχύει $g'(x) = f(x)$ και θα εφαρμόζουμε το θεώρημα **ROLLE** για τη g(x) στο διάστημα Δ.

Παράδειγμα Αν $\frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{3} + \frac{\gamma}{2} + \delta = 0$ να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $\alpha\xi^3 + \gamma\xi = -\beta\xi^2 - \delta$

Δύση

Ορίζουμε την συνάρτηση f(x)=αx^3+βx^2+γx+δ

Με το θεώρημα **BOLZANO** στο διάστημα [0,1] έχω :

1) H f συνεχής στο R άρα και στο [0,1]
2) f(0)=δ
3) f(1)=α+β+γ+δ $\Rightarrow$ f(0)f(1) ;;;;;;;;;

Με το θεώρημα Rolle και παράγουσα στο διάστημα [0,1] έχω :

Βρίσκω μια παράγουσα της f(x) την G(x)= $\frac{\alpha x^4}{4} + \frac{\beta x^3}{3} + \frac{\gamma x^2}{2} + \delta x$

Εφαρμόζω το Θ.Rolle στο [0,1] για την G(x) $\begin{cases} G(x) \text{ συνεχής στο} [0,1] \\ G(x) \text{ Παραγωγίσιμη στο} (0,1) \\ G(0) = 0 \\ G(1) = \frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{3} + \frac{\gamma}{2} + \delta = 0 \end{cases}$

Αρα ισχύουν οι προϋποθέσεις Rolle άρα υπάρχει ξ $\in$ (0,1) ώστε : $G'(\xi) = 0$

Αλλα $G'(x) = \left(\dfrac{\alpha x^4}{4} + \dfrac{\beta x^3}{3} + \dfrac{\gamma x^2}{2} + \delta x\right)' = ax^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0$

Δηλαδή : $a\xi^3 + \beta\xi^2 + \gamma\xi + \delta = 0 \Leftrightarrow a\xi^3 + \gamma\xi = -\beta\xi^2 - \delta$

Άσκηση 1
Θεωρούμε τη συνάρτηση g παραγωγίσιμη στο R με g(0)=0.
α) Βρείτε το g(1), αν γνωρίζουμε ότι $f(x)=g(x)-x^2$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ. Rolle στο [0,1].
β) Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιος ώστε $g'(x_0)=2x_0$

Λύση:
α) Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο [0,1], αρκεί f(0)=f(1)
Όμως f(0)=g(0)-0=0 και f(1)=g(1)-1 Δηλαδή πρέπει το g(1)-1=0 , άρα g(1)=1
β) $g'(x_0)=2x_0 \Leftrightarrow g'(x_0)-2x_0=0$ (1)
για να υπάρχει χ_0 που να ικανοποιεί την (1) πρέπει η εξίσωση g'(x)-2x=0 να έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (0,1), δηλαδή η συνάρτηση h(x)=g'(x)-2x να έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (0,1).
√ Με Bolzano δεν μπορώ να βρώ το h(0)h(1)

√ αναζητούμε συνάρτηση (αρχική-παράγουσα) της οποίας η παράγωγος να είναι h(x)=g'(x)-2x
Παρατηρούμε ότι αν $G(x)=g(x)-x^2$ τότε G'(x)=g'(x)-2x=h(x)
Θα εφαρμόσουμε το Θ.Rolle για την G στο [0,1]
Ισχύουν οι προϋποθέσεις από το ερώτημα α) άρα θα μηδενίζεται σε ένα τουλάχιστον χ_0 του (0,1) , που είναι το ζητούμενο.

Άσκηση 2 **Έστω συνάρτηση f συνεχής στο [0,1] και παραγωγίσιμη στο (0,1). Αν ισχύει οτι f(1)=f(0)+1, δείξτε οτι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ ώστε $f'(\xi)=1995\xi^{1994}$.**

Λύση
Βάζω στην σχέση που θέλω να αποδείξω όπου ξ το χ και έχω όταν τα πάω στο 1ο μέλος: $f'(x)-1995\chi^{1994}=O \Rightarrow [f(x)-x^{1995}]'=0$.
Αυτή ήταν και όλη η δυσκολία της άσκησης. Θέτω τώρα $h(\chi)=f(x)-x^{1995}$ και κάνω το Θεώρημα του Rolle.

- h συνεχής σαν διαφορά συνεχών συναρτήσεων στο (0,1).
- h παραγωγίσιμη με $h'(\chi)=f'(x)-1995x^{1994}$.
- h(0)=f(0),h(1)=f(1)-1=f(0)+1-1=f(0)=h(0).

άρα υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $h'(\xi)=0 \Rightarrow f'(\xi)-1995\xi^{1994}=0 \Rightarrow f'(\xi)=1995\xi^{1994}$.

Άσκηση 3 **Αν f,g παραγωγίσιμες στο [α,β] δείξτε οτι υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$: [f(α)-f(β)]g'(ξ) = [g(α)-g(β)]f'ξ)**

Λύση
Αρκεί να δείξω οτι: $\underbrace{[f(\alpha)-f(\beta)]}_{\Uparrow}g'(\xi) - \underbrace{[g(\alpha)-g(\beta)]}_{\Uparrow}f'\xi)=O$

σταθερές ποσότητες

για κάποιο $\xi \in (\alpha,\beta)$,δηλαδή οτι η προηγούμενη εξίσωση έχει μια ρίζα τουλάχιστον.

√Το Θ.Bolzano
δεν εφαρμόζεται
για την
συνάρτηση κ(χ) =
[f(α)-f(β)].g'(x) - [g(α)-g(β)]f'(x) αφού δεν μπορούμε να βρούμε το πρόσημο του κ(α).κ(β) .
√ Ελέγχω σύμφωνα σύμφωνα με τη 3η κατηγορία θεωρώ την συνάρτηση G(χ) όπου G'(χ) = κ(χ) , G(χ) = [f(α) - f(β)].g(x) - [g(α) - g(β)].f(x) .
Βλέπω οτι ισχύει το Θ.Rolle (εύκολα G(α)=G(β)) και άρα υπάρχει ξ∈(α,β) τέτοιο ώστε G'(ξ) = O ⇔ κ(ξ) =0 .

Για την εύρεση της παράγουσας (αντιπαραγώγου) συνάρτησης G(χ) με G΄(χ)=h(x).
Δείτε μερικές βασικές μορφές:

Απλή	**Σύνθετη**
$x^{\nu} = \left(\dfrac{x^{\nu+1}}{\nu+1}\right)'$	$f^{\nu}(x)f'(x) = \left(\dfrac{f^{\nu+1}(x)}{\nu+1}\right)'$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}} = \left(2\sqrt{x}\right)'$	$\dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = \left(2\sqrt{f(x)}\right)'$
$e^x = \left(e^x\right)'$	$e^{f(x)}f'(x) = \left(e^{f(x)}\right)'$
ημχ=(-συνχ)'	$\eta\mu f(x)f'(x) = \left(-\sigma\upsilon\nu f(x)\right)'$
συνχ=(ημχ)΄	$\sigma\upsilon\nu f(x)f'(x) = \left(\eta\mu f(x)\right)'$
$\dfrac{1}{x} = (\ln\|x\|)'$	$\dfrac{f'(x)}{f(x)} = (\ln\|f(x)\|)'$
$\dfrac{1}{x^2} = \left(-\dfrac{1}{x}\right)'$	$\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \left(-\dfrac{1}{f(x)}\right)'$

Ακόμα : 1) 2f(x)f΄(x)=[f²(x)]'
2) f ΄΄(x)f(x)+[f΄(x)]²=[f΄(x)f(x)]΄.
3) e^{px}[f΄(x)+pf(x)] = [e^{px}.f(x)]΄.
4) g(x)f΄(x)+f(x)g΄(x)+f(x)g(x)=e^x g(x)f'(x)+ e^x f(x)g'(x)+ e^xf(x)g(x)=(e^xf(x)g(x))'

ΑΣΚΗΣΕΙΣ στο Θεώρημα Rolle

ΑΣΚΗΣΗ 1η (Κατηγορία -1)

Αν ισχύει $\int_x^{x^2} f(t)dt \geq x^2 - x,$ για κάθε $x \in R$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο R. Να δείξετε ότι υπάρχει:
$\xi \in (0,1): f'(\xi) = 0$

Άσκηση 2η (4.44 Δυναμικό- κατηγορία 1)

Έστω f και g δύο συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα [0,2] για τις οποίες υποθέτουμε ότι ισχύει $\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 g(x)dx$ και F(x) ,G(x) αρχικές συναρτήσεις των f, g αντίστοιχα στο [0,2].

Αποδείξετε ότι :

α) Η συνάρτηση h(x)=F(x)-G(x) ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle στο διάστημα [0,2]

β) Υπάρχει ένας τουλάχιστον x_0 τέτοιος ώστε να ισχύει $f(x_0)=g(x_0)$

Άσκηση 3η (Κατηγορία 1)

Για τη συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases}(x+1)^2, & \alpha\nu -2\le \chi \le -1\\ (x+1)^3, & \alpha\nu\ -1< x\le 0\end{cases}$ να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (-2,0)$ με $f'(x_0)=0$

Άσκηση 4η (Κατηγορία 1-Μπαραλός σελ 156)

Δείξτε ότι υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f(x)=(x-3)lnx , με τετμημένη x0 στο διάστημα (1,3) στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα χχ'

Άσκηση 5η (Κατηγορία 2) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\chi^5-3\chi+1=0$ έχει μία μόνο πραγματική λύση στο διάστημα (1,2)

Άσκηση 6η Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση lnx=x-1 έχει μόνο την πραγματική ρίζα χ=1

Άσκηση 7η Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $xe^x-e^x+1=0$ έχει μόνο την ρίζα x=0

Άσκηση 8η Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x^4+\alpha x+\beta=0$ ($\alpha,\beta \in R$) έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.

Άσκηση 9η Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x^{2\nu+1}+\alpha x+\beta=0$ ($\nu \in N^*$, $\alpha,\beta \in R$) δεν μπορεί να έχει περισσότερες από 3 πραγματικές ρίζες.

Άσκηση 10η (κατηγορία 2 Περίπτωση 3)

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β], όπου α >0 και $\int_\alpha^\beta f(x)dx = -2a$. Αν ισχύει ότι: f(χ)> 1, για κάθε $\chi \in (\alpha, \beta)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση α + β+ $\int_a^x f(t)dt$ =x , έχει ακριβώς μια λύση στο (α, β).

Άσκηση 11η

Δείξτε ότι η εξίσωση $\chi^{2006}=2006\chi-\ln(\alpha^2+1)$, $\alpha \in R$ (1) έχει δύο το πολύ ρίζες στο (0,2008)

Άσκηση 12η (κατηγορια 1)

Έστω η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases} ax^2+\beta x+\gamma\ , x\le 0\\ \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}\ , \quad x>0\end{cases}$

Να βρείτε τα α,β, $\gamma \in R$ ώστε να εφαρμόζεται το Θ.Rolle για την f στο διάστημα [-1,1]. Να βρείτε το σημείο $x_0 \in (-1,1)$ με $f'(x_0)=0$

Άσκηση 13η (κατηγορία 1)
Να βρείτε τα α,β,γ $\in$R ώστε να ισχύει το θ.Rolle για τη συνάρτηση f με

$$f(x)=\begin{cases} x^2+\alpha x+1 & ,\alpha\nu\ -1\le x\le 0 \\ x^3+\beta x^2+2x+\gamma, & \alpha\nu\, 0<x\le 1\end{cases}$$
. Μετά να βρείτε το $x_0\in(-1,1)$ με f ΄(x_0)=0

Άσκηση 14η (κατηγορία 3 -394 Ξένος)
Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο [α,β] , παραγωγίσιμη στο (α,β) και f(α)=f(β)=0. Δίνεται και η συνάρτηση g με $g(x)=e^{\lambda x}f(x)$ λ$\in$R . Να αποδείξετε ότι για κάθε λ$\in$R υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ με $f'(x_0)+\lambda f(x_0)=0$

Άσκηση 15η (κατηγορία 3 -401 Ξένος)
Μια συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα [0,2] , παραγωγίσιμη στο (0,2) και ισχύει f(0)=2+f(2) . Να αποδείξετε ότι υπάρχει ξ$\in$(0,2) με f΄(ξ)=1-2ξ

Άσκηση 16(Κατηγορία 3) . Η συνάρτηση f **είναι** συνεχής στο [**α,** β].Να **αποδείξετε ότι υπάρχει** τουλάχιστον ξ$\in$ **(α,** β) τέτοιο **ώστε:**

$$\int_{\xi}^{\alpha} f(x)dx=(\xi-\beta)f(\xi)$$

Ασκηση 17. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο διάστημα [0, π] για την οποία ισχύει $\int_0^x f(x)dx=2$ Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας, τουλάχιστον, $x_0\in$ (0,π) τέτοιος, ώστε f(χ₀)=ημχ₀.

Άσκηση 18 Δύο συναρτήσεις f,g είναι συνεχείς στο [α,β] και παραγωγίσιμες στο (a,b) και f(α)g(α)=f(β)g(β). Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε να είναι $f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)=0$.

Λύσεις των ασκήσεων στο Θ. Rolle

Λύση άσκησης 1ης
Αρκεί να αποδείξουμε ότι ισχύει για την f το **θεώρημα Rolle** στο [0,1] και συγκεκριμένα αρκεί να αποδείξουμε ότι f(0) = f(1) (αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο R)

Έχουμε :
$$\int_x^{x^2} f(t)dt-x^2+x\ge 0 \Leftrightarrow \int_x^0 f(t)dt+\int_0^{x^2} f(t)dt-x^2+x\ge 0\Leftrightarrow$$
$$-\int_0^x f(t)dt+\int_0^{x^2} f(t)dt-x^2+x\ge 0, x\in R\}g(x)$$

Θέτουμε : g(x) = - $\int_0^x f(t)dt+\int_0^{x^2} f(t)dt - x^2+x\ge 0, x\in R$ (1) τότε η g(x) είναι παραγωγίσιμη.
Παρατηρούμε ότι g(0) = 0 και g(1) = 0. Τότε η σχέση (1) γράφεται : g(x)$\ge g(0)$ και g(x)$\ge$g(1), για κάθε x$\in R$. Άρα η g παρουσιάζει στις θέσεις x_1= 0 και x_2= 0 τοπικά ελάχιστα και σύμφωνα με το **θεωρ. Fermat** είναι g΄(0) = 0 και g΄(1) = 0.
Όμως g΄(x) =-f(x)+2xf(x^2) – 2x + 1, για x $\in R$. Οπότε έχουμε :
g΄(0) = 0 -f(0) + 1 = 0 $\Leftrightarrow$ f(0) = 1
και $\Leftrightarrow$ και

$g'(1) = 0$ $\quad -f(1) + 2f(1) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(1)=1$

Δηλαδή f(0) = f(1), οπότε ισχύει το θεώρημα Rolle για την f στο [0,1] και συνεπώς υπάρχει $\xi \in (0,1): f'(\xi) = 0$

__Λύση άσκησης 2__

f και g δύο συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα [0,2] και

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 g(x)dx \Rightarrow \int_0^2 (f(x)-g(x))dx = 0 \Rightarrow F(2)-G(2)-[F(0)-G(0)] = 0 \Rightarrow$$

$$F(2)-G(2) = F(0)-G(0)$$

α) $\left\{\begin{array}{c}\text{h(x) συνεχής στο [0,2]}\\ \text{h(x) παραγωγίσιμη στο (0,2)}\\ \text{h(0)=F(0)-G(0)}\\ \text{h(2)=F(2)-G(2)}\end{array}\right. \Rightarrow$ ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Rolle στο[0,2] για τη h(x)

β) άρα υπάρχει $x_0 \in (0,2)$ ώστε $h'(x_0)=0$ δηλαδή $F'(x_0)-G'(x_0)=0$ άρα $f(x_0)-g(x_0)=0$ $\Rightarrow f(x_0)=g(x_0)$.

__Λύση άσκησης 10ης__

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\alpha+\beta+\int_a^x f(t)dt-x$ παραγωγίσιμη, επομένως και συνεχής στο [α, β] Η g είναι συνεχής στο [α, β], ως άθροισμα συνεχών..

$g(\alpha)=\alpha+\beta+0-\alpha=\beta>0$, διότι β>α και α>0

$g(\beta)=\alpha+\beta-2^{\alpha}-\beta=-\alpha<0$, διότι α >0. $\quad g(\alpha)g(\beta)<0$ Από Θ. Bolzano η εξίσωση g(x)=0

$\Leftrightarrow \alpha+\beta+\int_a^x f(t)dt = x$, έχει τουλάχιστον μια λύση στο (α, β). , $g'(x)=f(x)-1>0$ άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β).

Τελικά η λύση, η οποία προκύπτει από το Θ. Bolzano, είναι μοναδική.

__Λύση της άσκησης 11ης__

(1) $\Leftrightarrow \chi^{2006}-2006\chi+\ln(\alpha^2+1)=0$ (2) Θεωρώ τη συνάρτηση $f(x)=\chi^{2006}-2006\chi+\ln(\alpha^2+1)$ αρκεί να δείξω ότι έχει το πολύ δύο ρίζες.

Υποθέτουμε ότι έχει τρεις διαφορετικές ρίζες $\rho_1<\rho_2<\rho_3$ δηλαδή $f(\rho_1)=f(\rho_2)=f(\rho_3)=0$

- Η f είναι παραγωγίσιμη στα $[\rho_1,\rho_2]$ και $[\rho_2,\rho_3]$ με $f'(x)=2006\chi^{2005}-2006$ (3)
- $f(\rho_1)=f(\rho_2)=f(\rho_3)=0$

Άρα εφαρμόζεται το Θ. Rolle στα διαστήματα $[\rho_1,\rho_2]$ και $[\rho_2,\rho_3]$ δηλαδή υπάρχουν $\xi_1 \in (\rho_1,\rho_2)$ και $\xi_2 \in (\rho_2,\rho_3)$ ώστε $f'(\xi_1)=0$ και $f'(\xi_2)=0$. Είναι όμως $f'(\xi)=0 \overset{(3)}{\Leftrightarrow} 2006\xi^{2005}-2006=0 \Leftrightarrow \xi^{2005}=1 \Leftrightarrow \xi=1$ Δηλαδή η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει **μόνο μία** ρίζα που είναι άτοπο.

__Λύση άσκησης 16ης__

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=(x-\beta)\int_\alpha^\chi f(t)dt$.

Η g είναι συνεχής στο [α, β]

Η g είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) με g'(x)= $\int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt$ +(x-β)f(x).

g(α)=g(β)=0

Από Θ. Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ ∈ (α,β) τέτοιο ώστε:

$$g^{'}(x)=0 \Leftrightarrow \int_{a}^{\xi} f(t)dt+(\xi-\beta)f(\xi)=0 \Leftrightarrow (\xi-\beta)f(\xi)=\int_{\xi}^{\alpha} f(t)dt$$

Λύση ασκησης 17

Αν G(x) μια αρχική της f(x) θα έχω : $\int_{0}^{\pi} f(x)dx = G(\pi)-G(0)=2 \quad (1)$

Έστω ότι g(x)=f(x)-ημx με θ. Bolzano θα έχω :

$$\left.\begin{array}{l} g(x)\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o[0,\pi] \\ g(0)=f(0)-\eta\mu 0 \\ g(\pi)=f(\pi)-\eta\mu\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} g(x)\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o[0,\pi] \\ g(0)=f(0) \\ g(\pi)=f(\pi) \end{array}\right\} \Rightarrow g(0)g(\pi)?$$

Θα βρώ μια παράγουσα της g(x) έστω h(χ) δηλαδή h'(x)=g(x) τότε h(x)=G(x)+συνx

Θ.Rolle για την h(x)

$$\left\{\begin{array}{c} h(x)\,\sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\,\sigma\tau o[0,\pi] \\ h(x)\,\pi\alpha\rho\alpha\gamma\omega\gamma\acute{\iota}\sigma\iota\mu\eta\ \ \sigma\tau o\ [0,\pi] \\ h(0)=G(0)+\sigma\upsilon\nu 0=G(0)+1 \\ h(\pi)=G(\pi)+\sigma\upsilon\nu\pi=G(0)-1=2+G(0)-1=G(0)+1 \end{array}\right.$$ ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle άρα

θα υπάρχει χ_0 ώστε h'(x_0)=0 $\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} h^{'}(x)=G^{'}(x)-\eta\mu x=f(x)-\eta\mu\chi \\ h^{'}(x_0)=0 \Rightarrow G^{'}(x_0)-\eta\mu x_0=0 \Rightarrow f(x_0)=\eta\mu x_0 \end{array}\right.$

Λύση ασκησης 18:

Θεωρώ τη συνάρτηση h(x)=f(x)g(x). Η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής στο [α,β] και παραγωγίσιμη στο (α,β), λόγω των αντίστοιχων ιδιοτήτων των f,g. Η παράγωγος της h είναι $h^{'}(x)=f^{'}(x)g(x)+f(x)g^{'}(x)$

Τώρα έχουμε: h(α)=f(α)g(α)=f(β)g(β)=h(β). Συνεπώς μπορώ να εφαρμόσω το θεώρημα του Rolle στο διάστημα (α,β). Δηλαδή υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε:

$$h^{'}(x)=0 \Rightarrow f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)=0$$