Κεφάλαιο

6

6. Θεώρημα Μέσης Τιμής (Θ.Μ.Τ)

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ →1

Ασκήσεις στις οποίες μας ζητάνε να εξετάσουμε αν εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ ή μας ζητάνε να προσδιορίσουμε τον ξ του Θ.Μ.Τ

ΤΙ ΚΑΝΟΥΜΕ Εξετάζουμε αν ισχύουν οι συνθήκες του Θ.Μ.Τ και λύνοντας την εξίσωση του συμπεράσματος του Θ.Μ.Τ βρίσκουμε τον ξ.

Προσοχή!! Όταν μας ζητάνε να δείξουμε οτι ισχύει το συμπέρασμα του Θ.Μ.Τ, δηλαδή οτι υπάρχει ξ∈(α,β): $f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(a)}{\beta-\alpha}$ (1) τότε και αν δεν ισχύουν οι συνθήκες του Θ.Μ.Τ μπορεί να υπάρχει το ξ που ζητάμε. Θα παίρνουμε λοιπόν την εξίσωση (1) θα βρίσκω το ξ και (αν υπάρχει) θα κοιτώ αν ανήκει στο (α,β).

Παραδείγματα : Άσκηση 2 Βιβλίου ά ομάδα σελ 249

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ →2

Ασκήσεις στις οποίες μας ζητάνε να αποδείξουμε κάποια ανισότητα.

ΤΙ ΚΑΝΟΥΜΕ Το είδος αυτό έχει 3 κατηγορίες ανάλογα με το αν η ανίσωση περιέχει:

i) Η ανισότητα περιέχει παραμέτρους (Θ.Μ.Τ)

ii) Η ανισότητα περιέχει μεταβλητή (Θ.Μ.Τ ή μονοτονία ή ακρότατα)

iii) Απόλυτα (Η ανισότητα περιέχει παραμέτρους η μεταβλητή)

► Απόδειξη ανισοτήτων με Θ.Μ.Τ.

● Φέρουμε την ανισότητα σε μορφή που να περιέχει τον λόγο $\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ του θεωρήματος μέσης τιμής

● Εκλέγουμε μία κατάλληλη συνάρτηση f και εφα ρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. σε κατάλληλο διάστημα [α,β]

● Από την μονοτονία της f '

και την διάταξη των σημείων: α < ξ < β

συνθέτουμε την ζητούμενη ανισότητα

Παράδειγμα (Με παραμέτρους)

Αν α<β, δείξτε οτι $e^{\alpha}<\dfrac{e^{\beta}-e^{a}}{\beta-\alpha}<e^{\beta}$ **(1)**

Λύση: Έστω η συνάρτηση f: $f(x)=e^x$ ορισμένη στο [α,β] η οποία είναι παραγωγίσιμη στο [α,β] με $f'(x)=e^x$ (2). Άρα εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ για την f και επομένως υπάρχει ξ∈(α,β) ώστε: $f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(a)}{\beta-\alpha}\Rightarrow e^{\xi}=\dfrac{e^{\beta}-e^{a}}{\beta-a}$ (3)

Όμως η συνάρτηση e^x είναι όπως είναι γνωστό αύξουσα συνάρτηση και επομένως αφού ξ∈(α,β) ⇔ α<ξ<β ⇔ $e^{\alpha}<e^{\xi}<e^{\beta}$ ⇔ (3)

Συμπέρασμα , Τα βήματα είναι τα εξής:

1) Βρίσκω το διάστημα που θα εφαρμόσω το Θ.Μ.Τ, από τις παραμέτρους της ανίσωσης. Εδώ είναι τα α, β και επειδή α<β το διάστημα είναι το (α,β).
2) Βρίσκω την συνάρτηση από το μεσαίο μέλος της ανίσωσης αφού πρώτα την φέρω στην μορφή $\dfrac{f(\beta)-f(a)}{\beta-\alpha}$. Πολλές φορές λείπει το β-α και διαιρώ όλα τα μέλη με αυτό, αφού πρώτα βρω το πρόσημο του.

3) Εφαρμόζω το Θ.Μ.Τ
4) Χρησιμοποιώ την μονοτονία της $f'(x)$.

Άσκηση Αν ισχύει $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$ να δείξετε ότι $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\beta}<\frac{\varepsilon\varphi\beta-\varepsilon\varphi\alpha}{\beta-\alpha}<\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}$

Λύση
Θεωρούμε τη συνάρτηση f(x)=εφ(x)
ΘΜΤ στο [α,β] για την συνάρτηση f. Εύκολα παρατηρώ ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις του ΘΜΤ άρα:

Υπάρχει ξ ώστε : $f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(a)}{\beta-\alpha}=\frac{\varepsilon\varphi\beta-\varepsilon\varphi\alpha}{\beta-\alpha}$

Αλλά $f'(x)=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\Rightarrow f'(\xi)=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\xi}$

Έτσι α<ξ<β ⇔ συνα<συνξ<συνβ $\overset{\alpha\ \tau\varepsilon\tau\alpha\rho\tau\eta\mu\acute{o}\rho\iota o}{\Leftrightarrow}$

συν^{2}α<συν^{2}ξ<συν^{2}β $\Leftrightarrow \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}>\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\xi}>\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\beta}\Leftrightarrow\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\beta}<\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\xi}<\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\beta}<f'(\xi)<\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}\Leftrightarrow\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\beta}<\frac{\varepsilon\varphi\beta-\varepsilon\varphi\alpha}{\beta-\alpha}<\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}$$

Να λυθεί η άσκηση:
Αν Ο<α<β<π/2 να δειχτεί ότι: (β-α).συνβ<ημβ-ημα< (β-α)συνα.

Παράδειγμα (με μεταβλητή)
Να δειχτεί οτι αν χ∈(0,1) ισχύει: 1+x<e^x<1+ex.

………..0…………………..χ ……………………1 …………….

Λύση: 1^o 2^o

Η λύση είναι παρόμοια, αλλά εδώ δεν ξέρουμε σε ποιο διάστημα να εφαρμόσουμε το Θ.Μ.Τ. Επειδή x∈ (0,1) θα χρησιμοποιήσουμε ένα από τα δυο διαστήματα (0,χ) ή (χ,1) χωρίς να ξέρουμε από πριν ποιο. Αν δεν μας βγει το 1ο που θα κάνουμε δοκιμάζουμε το 2ο και αντίστροφα.
Έστω η f(x)=e^x. Ισχύει το Θ.Μ.Τ στο (0,χ).Άρα υπάρχει ξ∈(0,x):

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\Leftrightarrow e^{\xi}=\frac{e^x-e^0}{x}\Leftrightarrow e^{\xi}=\frac{e^x-1}{x}\qquad(1)$$

Όμως 0<ξ<x<1 Επειδή η f(x)=e^x είναι **αύξουσα συνάρτηση** έχω e^o < e^ξ < e^x < e^1 (1)

$$\Leftrightarrow 1<\frac{e^x-1}{x}<e\overset{x>0}{\Leftrightarrow}......\Leftrightarrow x+1<e^x<ex+1$$

Σημείωση Οι ασκήσεις αυτού του είδους λύνονται και με μονοτονία η ακρότατα.

Παράδειγμα (Με απόλυτα)
Βγάζοντας το απόλυτο καταλήγω σε ένα από τα προηγούμενα είδη, ανάλογα με το αν η άσκηση έχει παραμέτρους ή μεταβλητή. Πάντως οι ασκήσεις αυτές λύνονται και χωρίς να βγάλουμε το απόλυτο.

Παράδειγμα: Να δειχτεί οτι αν π>β>α>0, |ημβ-ημα|<β-α.

Λύση
Επειδή β>α ⇔ β-α>0 ⇒ β-α=|β-α| και έχω

$|\eta\mu\beta-\eta\mu\alpha|<|\beta-\alpha|\Leftrightarrow|\frac{\eta\mu\beta-\eta\mu\alpha}{\beta-\alpha}|<1$ αφού |β-α|>0.Έστω η f(x)=ημχ. Βλέπουμε οτι ισχύει το Θ.Μ.Τ στο [α,β] και άρα υπάρχει ξ∈(α,β) τέτοιο ώστε f $^/$(ξ)

$$=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\xi=\frac{\eta\mu\beta-\eta\mu\alpha}{\beta-\alpha}\qquad(2)$$

Όμως |συνξ|<1 (3) αφού ξ∈(α,β) υποσύνολο του (0,π) άρα συνξ≠1.

Έτσι (2), (3)=>(1).(Δεν χρησιμοποιήσαμε μονοτονία αφού ισχύει η (3))

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ→3

Σε αυτό το είδος άσκησης μας δίνουν πληροφορίες για την f′ και μας ζητάνε να δείξουμε μια σχέση που συμμετέχει η f ή αντίστροφα.

ΤΙ ΚΑΝΟΥΜΕ Θα χρησιμοποιήσω το Θ.Μ.Τ αφού αυτό μας δίνει σχέση που να περιέχει τις f, f′

Παράδειγμα : Έστω f παραγωγίσιμη στο [α,β] και |f′(x)|<κ για κάθε χ∈(α,β) με κ>0. Δείξτε ότι αν $\xi_1,\xi_2\in$(α,β) τότε: $|f(\xi_2)-f(\xi_1)|<\kappa|\xi_2-\xi_1|$

Λύση : Προφανώς για την f ισχύει το Θ.Μ.Τ στο (α,β) άρα και στο (ξ_1,ξ_2) υποσύνολο του (α,β). Άρα υπάρχει $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$ ώστε :

$$f'(\xi)=\frac{f(\xi_2)-f(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}\Rightarrow f'(\xi)=\left|\frac{f(\xi_2)-f(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}\right| \quad (1)$$

Όμως $\xi\in$(α,β) και άρα

$$|f'(\xi)|<\kappa\Rightarrow\frac{|f(\xi_2)-f(\xi_1)|}{|\xi_2-\xi_1|}<\kappa\Rightarrow|f(\xi_2)-f(\xi_1)|<\kappa|\xi_2-\xi_1|$$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ→4

Στο είδος αυτό περιλαμβάνονται τρία είδη ασκήσεων που λύνονται με Θ.Μ.Τ αλλά μπορεί να λύνονται και με άλλους τρόπους (ανάλογα με τα δεδομένα).

Οι μεθοδολογίες που περιγράφουμε είναι περισσότερο τρόποι σκέψης παρά λύσεις ενός συγκεκριμένου είδους άσκησης.
Άλλωστε και οι ασκήσεις περιγράφονται σε πολύ γενικό πλαίσιο που μπορεί να περιλαμβάνει πολλά είδη.

Α-ΕΙΔΟΣ Ασκήσεις που μας ζητάνε να δείξουμε ότι $f''(\xi)=0$.

Μέθοδος Εφαρμόζω Rolle στην f ′(x). Πολλές φορές όμως πριν από αυτό εφαρμόζω το Θ.Μ.Τ σε δυο διαστήματα και βρίσκω (με τα κατάλληλα δεδομένα) ότι f′(α)=f′(β) οπότε μετά κάνω Rolle στο [α,β] για την f ′(x).

Β-ΕΙΔΟΣ Ασκήσεις που μας ζητάνε να δείξουμε ότι $f'(\chi_1)+f'(\chi_2)+\ldots+f'(\chi_\nu)=0$.
Μέθοδος Εφαρμόζω το Θ.Μ.Τ (θεωρητικά μπορεί να εφαρμοστεί και το Rolle) σε ν διαστήματα. Συνήθως (χωρίς να είναι απαραίτητο), χωρίζω το αρχικό διάστημα σε ν «ίσα» διαστήματα.

Άσκηση 1 Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α,β], παραγωγίσιμη στο (α,β) και f(α)=f(β). Να αποδείξετε ότι υπάρχουν x1,x2 ∈(α,β) τέτοια ώστε να είναι $f'(x_1)+f'(x_2)=0$

Υπόδειξη: να χωρίσετε το [α,β] σε [α,$\frac{a+\beta}{2}$] και [$\frac{a+\beta}{2}$,β] και να εφαρμόσετε ΘΜΤ

Γ-ΕΙΔΟΣ Ασκήσεις που στα δεδομένα τους έχουν στοιχεία για τις διαφορές α-β, f(α)-f(β).
Π.χ α,β,γ διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, άρα γ-β=β-α.
Μέθοδος Εφαρμόζω το Θ.Μ.Τ στα διαστήματα που προκύπτουν από τις διαφορές.

Ας πούμε στο π.χ με την αριθμητική πρόοδο στα διαστήματα (α,β), (β,γ) αν βέβαια α<β<γ.

Άσκηση : Έστω μια συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο R. Αν οι αριθμοί f(2),f(4),f(6) είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου , να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in$(2,6) τέτοιος ώστε $f''(x)=0$

Σύντομη Λύση : Πρέπει 2 f(4)= f(2)+f(6)

Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in$(2,4) ώστε $f'(\xi_1)=\dfrac{f(4)-f(2)}{4-2}$ (1)

Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in$(4,6) ώστε $f'(\xi_2)=\dfrac{f(6)-f(4)}{6-4}$ (2)

Αλλά επειδή 2 f(4)= f(2)+f(6) Βάσει της (1) και (2) έχω ότι : $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$

Τώρα εφαρμόζω Rolle στο [ξ1,ξ2] και έχω $f''(x_0)=0$

2.1 Θέματα που αφορούν την 1η Συνέπεια Θ. Μ. Τ

Ζητείται να δειχθεί οτι μια συνάρτηση f είναι σταθερή σε ένα διάστημα Δ (στα εσωτερικά του σημεία).

<u>ΤΙ ΚΑΝΟΥΜΕ</u> Όταν θέλουμε να δείξουμε ότι μια συνάρτηση είναι σταθερή, σε ένα διάστημα Δ, μπορούμε, εφόσον γίνεται, να δείξουμε ότι είναι παραγωγίσιμη και ότι f'(x)=0 στο Δ. Ως γνωστό το θεώρημα δεν ισχύει σε ένωση διαστημάτων. Αν θέλουμε να δείξουμε ότι δύο συναρτήσεις είναι ίσες σε ένα διάστημα , μπορούμε, εφόσον γίνεται, να δείξουμε ότι η διαφορά τους είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση με παράγωγο 0, οπότε η διαφορά τους θα είναι c , κατόπιν δείχνουμε ότι το c = 0.

Ζητείται να αποδειχθεί σχέση στην οποία συμμετέχει σταθερά ποσότητα. Η σταθερά μπορεί να έχει την μορφή αριθμού η γράμματος.

1η παραλλαγή

Τυχαία σταθερά (c)-γράμμα.
Φέρνω τη σχέση στη μορφή κ(x)=c και δείχνω ότι κ'(x)=O.
Παράδειγμα
Δείξτε ότι f'(x)=f(x)$\Rightarrow$f(X)=ce^x.

Λύση $f(x)=ce^x \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{e^x}=c$. Άρα σύμφωνα με 1η συνέπεια του Θ.Μ.Τ. αρκεί να δείξω ότι $\left(\dfrac{f(x)}{e^x}\right)'=0$ έχω $\left(\dfrac{f(x)}{e^x}\right)'=\dfrac{f'(x)e^x-f(x)e^x}{e^{2x}}=0\ \alpha\varphi o\acute{u}\ f'(x)=f(x)$

2η παραλλαγή

Συγκεκριμένη σταθερά - αριθμός .
Φέρνω τη σχέση στη μορφή κ(χ)=ρ όπου ρ ο αριθμός της άσκησης. Ακολούθως όπως προηγουμένως δείχνω ότι κ(χ)=c και μετά θέτοντας όπου χ κάποιο αριθμό (αρχικές συνθήκες) βρίσκω ότι c=ρ. Δηλαδή πρώτα δείχνω ότι μια συνάρτηση είναι ίση με μια σταθερά και μετά βρίσκω την σταθερά.

Παράδειγμα
Να δειχθεί ότι ημ²χ+συν²χ=1.

Λύση

Έστω f(x)=ημ²χ+συν²χ. $\Rightarrow$
f΄(x)=2ημχ.συνχ-2συνχ.ημχ=0 Άρα f(x)=ημ²χ+συν²χ=c, σταθερά.
Θέτω χ=0 και έχω $ημ^2 0+συν^2 0=0$ $\Rightarrow$ c=1. Άρα ημ²χ+συν²χ=1.
Εδώ αρχική συνθήκη ήταν ότι f(0)=1.

Άσκηση Αν για τις συναρτήσεις f , g ισχύουν f(0)=0 g(0)=1 και g′(x)=-f(x) , f ′(x) =g(x) , $x \in R$ να αποδείξετε ότι $f^2(x)+g^2(x)=1$

2.2 Θέματα που αφορούν την 2η Συνέπεια Θ.Μ.Τ

1Η ΜΟΡΦΗ (ΑΠΟΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ)

Χρησιμοποιούμε τον τύπο f'(χ)=g′(χ) $\Leftrightarrow$ f(χ)=g(χ)+c.

Παράδειγμα
Έστω $f^{(3)}(x)=g^{(3)}(x)$ και f′′(0)=g′′(0)+1 (1) f′(1)=g′(1)+2 (2) f(2)=g(2)+3 (3)
Να βρεθεί η f(x)-g(x) (ή (f-g)(x)).

Λύση
$f^{(3)}(x)=g^{(3)}(x) \Rightarrow [f''(x)]'=[g''(x)]' \Rightarrow f''(x)=g''(x)+c \Rightarrow (f'(x))'=(g'(x)+cx)' \Rightarrow f'(x)=g'(x)+cx+p$
$\Rightarrow f'(x)=(g(x)+c\frac{x^2}{2}+px)' \Rightarrow f(x)=g(x)+c\frac{x^2}{2}+p.x+n$
Για x=0 $\Rightarrow$ f′′(0)=g′′(0)+c $\Rightarrow$ c=1.

Για x=1 $\Rightarrow$ f′(1)=g′(1)+c1+p $\Rightarrow$ 1+p=2 $\Rightarrow$ p=1.
Για χ=2 $\Rightarrow$ ….. $\Rightarrow$ p =-1
Άρα f(x)-g(x)= $\frac{x^2}{2}$ +x-1.

2Η ΜΟΡΦΗ

Μας δίνουν μια σχέση σε αυτό το είδος την οποία εμείς τη φέρνουμε στη μορφή f′(x)=g′(x).

Αυτή είναι η δυσκολία αυτού του είδους αφού ακολούθως εφαρμόζω το 1ο είδος. Η μορφή αυτή είναι ίδια ουσιαστικά με την τελευταία περίπτωση του Rolle.

Παράδειγμα: Έστω f(x)=f′(x), f(0)=e² (1). Να βρεθεί η συνάρτηση f.

Λύση
f(x)=f′(x) $\Rightarrow$ f(x)-f′(x)=O $\Rightarrow$ e^{-x}.(f(x)-f′(x))=O $\Rightarrow$ $[e^x$. f(x)]'=0 $\Rightarrow$ e^{-x}. f(x)=c $\Rightarrow$ f(x)=ce^x (2).
Για χ=0 έχω (2) $\Rightarrow$ f(0)=c $\Rightarrow$ c=e^2 (3)
(2),(3) $\Rightarrow$ f(x)=$e^2.e^x$ $\Rightarrow$ f(x)=e^{x+2}.

Ασκήσεις για λύση:
α) Αν f′(x)=3.f(x), f(1)=e^5 να βρεθεί η f(x).
β) Αν f′(x)=$\frac{4}{x}$.f(x), f(1)=1 να βρεθεί η f(x).

3Η ΜΟΡΦΗ

Ανισώσεις με παράγωγο f′(x)>g′(x).

Η 2η συνέπεια του Θ.Μ.Τ (**αποπαραγώγιση) δεν εφαρμόζεται στις ανισώσεις.** Στις ανισώσεις αυτές δουλεύουμε έτσι ώστε να αποκτήσουμε πληροφορίες για την μονοτονία της συνάρτησης. $f'(x)>g'(x) \Rightarrow f'(x)-g'(x)>0 \Rightarrow (f-g)'(x)>0 \Rightarrow (f-g)(x)$ αύξουσα. Δηλαδή αν $x>α \Rightarrow (f-g)(x)>(f-g)(α)$.
Ανάλογα δουλεύουμε αν έχουμε φθίνουσα συνάρτηση.

Παράδειγμα Αν f′(x)>g′(x) όταν χ>α και f(α)=g(α) (1) να δειχτεί ότι: f(χ)>g(χ), όταν χ>α.

Λύση

$f'(x)>g'(x) \Rightarrow f'(x)-g'(x)>0 \Rightarrow (f-g)'(x)>0$.

Άρα η συνάρτηση (f-g)(x) είναι αύξουσα για χ>α.

Επομένως $(f-g)(x)>(f-g)(α) \Rightarrow f(x)-g(x)>f(α)-g(α) \Rightarrow f(x)-g(x)>0 \Rightarrow f(x)>g(x)$, x>α.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ *στο Θεώρημα Μέσης Τιμής (Θ.Μ.Τ)*

1η ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ ΘΜΤ

Άσκηση 1 Να εξετάσετε αν εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ, για τις παρακάτω συναρτήσεις στο αντίστοιχο διάστημα [α,β] και να βρείτε όλα τα $ξ \in (α,β)$ ώστε $f'(ξ)=\dfrac{f(β)-f(α)}{β-α}$ καθώς και την εξίσωση της εφαπτομένης που είναι παράλληλη στην ευθεία AB με A(α,f(α)) ,B(β,f(β))

α) $f(x)=|x^2-x|$, $x \in [-1,1]$

β) $f(x)=\begin{cases} 2x^2+x \ , & x<0 \\ x^3+x \ , & x\ge 0 \end{cases}$, $x \in [-1,1]$

γ) $f(x)=x(1-\ln x)$, $x \in [1,e]$

Άσκηση 2 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2+α \ , & αν \ x\le 1 \\ x^3-αx+β \ , & αν \ x>1 \end{cases}$

Αν ισχύει το Θ.Μ.Τ. στο διάστημα [-1,2] τότε:

i) Να βρεθούν οι τιμές των α, β

ii) Να δειχθεί ότι υπάρχει σημείο M(ξ,f(ξ)) με $ξ \in [-1,2]$ στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία ε: 2x-y+3=0

► **Εύρεση παραμέτρων**

Δουλεύουμε:

i) Με τα κρίσιμα σημεία στα οποία η συνάρτηση πρέπει να είναι συνεχής και παραγωγίσιμη

ii) Με συνθήκες

Άσκηση 3η

Να εξετάσετε αν εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. για τη συνάρτηση : 1) $f(x)=\begin{cases} x^2-x, & x\in[-1,0) \\ x \ , & x\in(0,1] \end{cases}$

2) $f(x)=|x^2+3x-4|$ στο [-2,2]

$2^η$ ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ

Άσκηση 1 Να αποδειχθεί $x+1 \le e^x \le xe^x+1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Άσκηση 2 Να αποδειχθεί $\frac{x}{x+1} < \ln(x+1) < x$, για κάθε x>-1 και $x \neq 0$. Στη συνέχεια

να δείξετε: i) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$, ii) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x^3} = 0$

$3^η$ ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ ΘΜΤ

<u>Άσκηση 1</u> Έστω f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με f(0)=0 και $f(x)-e^{-f(x)}=x-1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε την f' συναρτήσει της f

β) Να δειχθεί ότι υπάρχει η f'' και να βρεθεί η $f''(0)$

γ) Να δειχθεί ότι οι συναρτήσεις f και f' είναι γνησίως αύξουσες

δ) Να δειχθεί ότι $\frac{x}{2} \le f(x) \le xf'(x)$ για κάθε $x \in R$. Πότε ισχύει το ίσον;

$4^η$ ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ ΘΜΤ

<u>Άσκηση 1</u> Αν η f είναι συνεχής στο [α,β], παραγωγίσιμη στο (α,β) και f(α)=α, f(β)=β, $α \neq β$ να δείξετε ότι:

α) Υπάρχει $ξ \in (α,β)$ τέτοιο ώστε f(ξ)=α+β-ξ

β) Υπάρχουν $ξ_1$, $ξ_2 \in (α,β)$ με $ξ_1 \neq ξ_2$ τέτοια ώστε $f'(ξ_1)f'(ξ_2)=1$

> ► <u>Θ.Μ.Τ. και Bolzano</u>
> Για την πολλαπλή εφαρμογή του θεωρήματος Μέσης Τιμής σε ένα διάστημα [α,β], τα ενδιάμεσα σημεία μπορούν να προκύψουν και με εφαρμογή του θεωρήματος Bolzano

<u>Άσκηση 2</u> Έστω συνεχής $f:[0,2] \to R$ με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0,2)$ Να δείξετε ότι: α) $f(0) \neq f(2)$ β) Υπάρχει $x_0 \in (0,2)$ με $5f(x_0)=2f(0)+3f(2)$

γ) Υπάρχουν $ξ_1$, $ξ_2$, $ξ \in (α,β)$ τέτοια ώστε $\frac{3}{f'(ξ_1)} + \frac{2}{f'(ξ_2)} = \frac{5}{f'(ξ)}$

$1^η$ Συνέπεια Θ.Μ.Τ

Άσκηση $1^η$ 4.38 Δυναμικό ($1^η$ Συνέπεια)

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $F(x) = \int_0^x e^{\sqrt{1+t^2}}dt + \int_{x+1}^1 e^{\sqrt{t^2-2t+2}}dt$ είναι σταθερή στο R και έπειτα να βρείτε τον τύπο της.

Λύση άσκησης $1^{ης}$

$$F(x) = \int_0^x e^{\sqrt{1+t^2}}dt + \int_{x+1}^1 e^{\sqrt{t^2-2t+2}}dt \Rightarrow F(x) = \int_0^x e^{\sqrt{1+t^2}}dt - \int_1^{x+1} e^{\sqrt{t^2-2t+2}}dt \Rightarrow F'(x) = \left(\int_0^x e^{\sqrt{1+t^2}}dt - \int_1^{x+1} e^{\sqrt{t^2-2t+2}}dt\right)'$$

$$F'(x) = e^{\sqrt{1+x^2}} - e^{\sqrt{(x+1)^2-2(x+1)+2}}(x+1)' \Rightarrow F'(x) = ... = 0$$ άρα F(x)=c και F(x)=0 άρα c=0

Άσκηση 2η 4.41 Δυναμικό (1η Συνέπεια)
Έστω η συνάρτηση f, συνεχής στο διάστημα Δ=[0,+∞) για την οποία ισχύει:

$$x+\int_0^x f(t)dt=(x+1)f(x),\ x\ge 0$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα [0,+∞) .
β) Να βρείτε τον τύπο της f.
Λύση άσκησης 2ης

α) Αφού η f είναι συνεχής στο [0,+∞) τότε η $\int_0^x f(t)dt$ θα είναι παραγωγίσιμη στο [0,+∞)

β) $\left(x+\int_0^x f(t)dt\right)'=\left((x+1)f(x)\right)'\Rightarrow 1+f(x)=(x+1)'f(x)+f(x)(x+1)$ τότε

$f'(x)=\dfrac{1}{x+1}\Rightarrow f'(x)=\left(\ln|x+1|\right)'\Rightarrow f(x)=\ln|x+1|+c$ (2) τώρα για x=0 στη σχέση που δίδεται θα έχω f(0)=0 (3) από την (2) και (3) έχω f(o)=ln1+c άρα c=0 συνεπώς η ζητούμενη συνάρτηση είναι f(x)=ln|x+1|

4. 2η Συνέπεια Θ.Μ.Τ

Άσκηση 1η (4.42 Δυναμικό -2η Συνέπεια)
Να βρείτε τη συνεχή στο R συνάρτηση f η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις : f(x)>0 στο R και

$f(x)=2004+\int_1^x f(t)dt$, x∈R (1)

Λύση άσκησης 1ης

$$f'(x)=0+\left(\int_1^x f(t)dt\right)'\Rightarrow f'(x)=f(x)$$

1η Λύση Εφαρμογή βιβλίου f(x)=ce^x

2η Λύση $f'(x)=f(x)\Rightarrow\dfrac{f'(x)}{f(x)}=1\Rightarrow\left(\ln|f(x)|\right)'=(x)'\Rightarrow\ln|f(x)|=x+c1$ τότε

$e^{x+c1}=f(x)\Rightarrow f(x)=e^{c1}e^x\Rightarrow f(x)=ce^x$ (2)

Οπότε από την (1) έχω f(0)=2004

Από την (2) έχω f(0)=c άρα c =2004 $\Rightarrow f(x)=2004e^x$

Άσκηση 2η (2η Συνέπεια) Η συνάρτηση Ι είναι συνεχής στο R Αν ισχύει: f(x)= $\int_0^x 2te^{t^2+1-f(t)}dt$, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

Λύση άσκησης 2ης

Η συνάρτηση $2xe^{x^2+1-f(x)}$ είναι συνεχής, ως γινόμενο των συνεχών 2 x και $e^{x^2+1-f(x)}$ (σύνθεση των συνεχών , , e^x , $e^{x^2+1-f(x)}$), άρα η f είναι παραγωγίσιμη.

'Έχουμε: $f'(x)=2xe^{x^2+1-f(x)}\Leftrightarrow f'(x)=2xe^{x^2+1}e^{-f(x)}\Leftrightarrow e^{f(x)}f'(x)=2xe^{x^2+1}$

$$\Leftrightarrow\left(e^{f(x)}\right)'=\left(e^{x^2+1}\right)'$$

Συμπεραίνουμε ότι: $e^{f(x)}=e^{x^2+1}+c$ άρα f(x)= $\ln(e^{x^2+1}+c)$ **(1)**

Η αρχική **σχέση** για x=0 γίνεται: f(0) =0. Από την (1), f(0)=ln(e+c) άρα, ln(e+c)=0

$\Leftrightarrow$ e+c=1 $\Leftrightarrow$ c=1-e

Τελικά, f(x)= $\ln(e^{x^2+1}+1-e)$, x$\in$R

Άσκηση 3η . Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο (0,+∞) και ισχύει: $f(x)=x+\frac{1}{x}\int_1^x f(t)dt$. Να υπολογίσετε τον τύπο της συνάρτησης f**.**

Λύση άσκησης 3ης

Η f είναι παραγωγίσιμη στο (0, +∞**)** . Από τη δοθείσα σχέση προκύπτει: $xf(x)=x^2+\int_1^x f(t)dt$. Η f είναι συνεχής άρα η $\int_1^x f(t)dt$ παραγωγίσιμη, επομένως και η fπαραγωγίσιμη.

Παραγωγίζοντας έχουμε:
f(x)+xf ′(x)=2x+f(x)$\Leftrightarrow$ xf ′(x)=2x$\Leftrightarrow$ f ′(x) =2. Από την τελευταία σχέση προκύπτει:

1ος Τρόπος

$\int f'(x)dx=\int 2dx \Rightarrow f(x)=2x+c$ (1)

2ος Τρόπος (2η συνέπεια) f ′(x) =2$\Rightarrow$ $f'(x)=(2x)' \Rightarrow f'(x)=2x+c$

Για χ=1 η αρχική σχέση, γίνεται:
f(1)=1+0 $\Leftrightarrow$ f(1)=1
Από την **σχέση (1), f(1)=** 2+c$\Leftrightarrow$ 1=2+c$\Leftrightarrow$ c=-1
Τελικά f(x)=2x— 1 , x$\in$ (0,+∞) **.**

Άσκηση 4η(1η Συνέπεια-ΘΜΤ)

Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει : $0\le 2f'(x)\le f(1)-f(0)$ **για κάθε χ**$\in$R (1)
να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή συνάρτηση.

Απόδειξη

Για x$\neq$0, στο διάστημα [0,χ] ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις Θ.Μ.Τ για την f , οπότε υπάρχει ξ $\in$(0,χ) ώστε : $f'(\xi)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ (2)

Η (1) ισχύει για κάθε **χ**$\in$R άρα και για χ=ξ : $0\le 2\frac{f(x)-f(0)}{x})\le f(1)-f(0)$ **(3) Για χ=1 θα έχω:**

$0\le 2\frac{f(1)-f(0)}{1})\le f(1)-f(0) \Leftrightarrow 0\le f(1)-f(0)\le f(1)-f(0)$ **άρα f(1)=f(0) (4)**

(1) $\overset{(4)}{\Rightarrow} 0\le f'(x)\le 0 \Leftrightarrow f'(x)=0$ άρα σταθερή