Γενικά για το ολοκλήρωμα

1 **Το ορισμένο ολοκλήρωμα** $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ **είναι ο αριθμός** $G(\beta)-G(\alpha)$**,** G παράγουσα της **συνεχούς *f(x)*** .

2 Ο πραγματικός αριθμός $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ εξαρτάται από τη συνάρτηση f και τα όρια **ολοκλήρωσης** α,β ενώ δεν εξαρτάται από τη μεταβλητή x

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(u)du = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(w)dw.$$

3 **Η συνάρτηση** $\int_{a}^{x} f(t)dt$ **είναι παράγουσα της συνεχούς** $f(t)$**:** $\left(\int_{a}^{x} f(t)dt\right)' = f(x)$

Είναι συνάρτηση με μεταβλητή **το x** η οποία μαζί με το α πρέπει να ανήκουν στο πεδίο ορισμού της $f(t)$ που πρέπει να είναι συνεχής.

Να μην συγχέουμε την μεταβλητή του ορισμένου ολοκληρώματος t με την μεταβλητή της συνάρτησης ολοκλήρωμα x **Η κάθε μία για την άλλη είναι σταθερή** – ανεξάρτητη. Το t παίρνει τιμές μεταξύ του α και του x. Προσοχή! Οι μεταβλητές μπορεί να δοθούν και ανάποδα!

4 **Ισχύει :** $f(\beta)-f(a)=\int_{a}^{\beta} f'(x)dx$. Χρήσιμο για τον υπολογισμό **τιμών** της συνάρτησης f όταν είναι γνωστός ο ρυθμός μεταβολής της f , οπότε **μπορεί να υπολογιστεί το** $\int_{a}^{\beta} f'(x)dx$**.**

5 **Ισχύει :** $f(x)-f(a)=\int_{a}^{x} f'(t)dt$. Χρήσιμο για τον υπολογισμό **της συνάρτησης** f όταν είναι γνωστός ο ρυθμός μεταβολής της f και κάποια τιμή της $f(a)$ οπότε **μπορεί να υπολογιστεί το** $\int_{a}^{x} f'(t)dt$.

6 !!!!! Για τον υπολογισμό **του πεδίου ορισμού** , (**όταν αυτό μας ζητείται ή δεν δίνεται**), της συνάρτησης $\int_{g(x)}^{h(x)} \phi(x)f(t)dt$ και εφόσον η f είναι συνεχής σε ένωση δύο διαστημάτων Δ_1 , Δ_2 , οι συναρτήσεις ϕ, h, g παραγωγίσιμες στα πεδία ορισμού τους

πρέπει να λάβουμε υπόψιν μας τους εξής περιορισμούς για το χ:

Το x να ανήκει στα πεδία ορισμού των ϕ, h, g και συγχρόνως $h(x), g(x)$ να ανήκουν και τα δύο στο Δ_1 **ή και τα δύο στο Δ_2.**

Κατόπιν επιλέγοντας **κατάλληλο (;) αριθμό α** θα πρέπει να μετασχηματίσουμε την συνάρτηση :

$\int_{g(x)}^{h(x)} \phi(x)f(t)dt = \phi(x)\int_{\alpha}^{h(x)} f(t)dt - \phi(x)\int_{a}^{g(x)} f(t)dt$. Ποια θα είναι η παράγωγός της;

Τρόποι Υπολογισμού Ολοκληρωμάτων

1. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΟΥ ΕΡΓΑΖΟΜΑΣΤΕ ΜΕ ΑΛΛΑΓΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

1η Περίπτωση

Μορφή	Αντικατάσταση	Αποτέλεσμα
$I=\int_a^\beta f'(x)f^\nu(x)dx,\ \nu\neq -1$	u=f(x) οπότε du=f ’(x)dx	$I=\int_{u1}^{u2}u^\nu du=\left[\frac{u^{\nu+1}}{\nu+1}\right]_{u1}^{u2}$
$I=\int_\alpha^\beta \frac{f'(x)}{f(x)}dx$	u=f(x) οπότε du=f ’(x)dx	$I=\int_{u1}^{u2}\frac{1}{u}du=\left[\ln\lvert u\rvert\right]_{u1}^{u2}$
$I=\int_\alpha^\beta \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx$	u=f(x)	$I=\int_{u1}^{u2}\frac{1}{\sqrt{u}}du=\left[2\sqrt{u}\right]_{u1}^{u2}$
$I=\int_\alpha^\beta \eta\mu f(x)f'(x)dx$	u=f(x)	$I=\int_{u1}^{u2}\eta\mu u du=\left[-\sigma\upsilon\nu u\right]_{u1}^{u2}$
$I=\int_a^\beta \sigma\upsilon\nu f(x)f'(x)dx$	u=f(x)	$I=\int_{u1}^{u2}\sigma\upsilon\nu u du\left[\eta\mu u\right]_{u1}^{u2}$
$I=\int_a^\beta e^{f(x)}f'(x)dx$	u=f(x)	$I=\int_{u1}^{u2}e^u du=\left[e^u\right]_{u1}^{u2}$

Όλες οι παραπάνω περιπτώσεις μπορούν να υπολογιστούν και απευθείας με εύρεση αρχικής (παράγουσας)

Π.χ $I=\int_a^\beta f'(x)f^\nu(x)dx=\int_a^\beta\left(\frac{1}{\nu+1}f^{\nu+1}(x)\right)'dx=\left[\frac{1}{\nu+1}f^{\nu+1}(x)\right]_a^\beta$

2η Περίπτωση (Ρητή συνάρτηση)

Αν $I=\int_\alpha^\beta\frac{P(x)}{Q(x)}dx$, όπου P και Q πολυώνυμα του χ τότε:

- Αν P(x)=Q’(x) τότε αναγόμαστε σε προηγούμενα Περίπτωση 1 Μορφή 2
- Αν P(x) $\neq$ Q’(x) τότε :
    1. Αν Βαθμός P(x) <Βαθμός Q(x) τότε κάνουμε ανάλυση του κλάσματος σε άθροισμα κλασμάτων.
    2. Αν Βαθμός P(x) $\geq$ Βαθμός Q(x) τότε εκτελούμε τη διαίρεση P(x):Q(x) οπότε P(x)=Π(χ)Q(x)+Y(x) $\Leftrightarrow \frac{P(x)}{Q(x)}=\Pi(x)+\frac{Y(x)}{Q(x)}$

3η Περίπτωση

- Αν $I=\int_\alpha^\beta P(e^{\alpha x})dx$ θέτουμε u=e^αχ
- Αν $I=\int_\alpha^\beta P(\ln\alpha x)dx$ θέτουμε u=lnαx

4η Περίπτωση

Αν $I=\int_\alpha^\beta P(x)\sqrt{ax+\beta}dx$ όπου P(x) πολυωνυμική συνάρτηση : Θέτουμε u=αx+β ή $u=\sqrt{ax+\beta}$

5η Περίπτωση

- Αν $I=\int_{\alpha}^{\beta}\eta\mu^{2\nu}x dx$ ή $\int_{\alpha}^{\beta}\sigma\upsilon\nu^{2\nu}x dx$ τότε υποβιβάζουμε τους εκθέτες με τους τύπους αποτετραγωνισμού : $\eta\mu^2 x=\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{2}$, $\sigma\upsilon\nu^2 x=\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2x}{2}$

6η Περίπτωση Επειδή δε γνωρίζουμε την αρχική της λογαριθμικής συνάρτησης όταν θέλουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta}\ln(\lambda\chi+\mu)d\chi$ θα γράφουμε:

$$\int_{\alpha}^{\beta}\ln(\lambda\chi+\mu)d\chi=\int_{\alpha}^{\beta}1.\ln(\lambda\chi+\mu)d\chi=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{\lambda}(\lambda\chi+\mu)'\ln(\lambda\chi+\mu)d\chi$$

και θα συνεχίζουμε με ολοκλήρωση κατά παράγοντες.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΟΥ ΕΡΓΑΖΟΜΑΣΤΕ ΜΕ ΚΑΤΑ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

1η Περίπτωση Ολοκλήρωμα της μορφής $\int_{a}^{\beta}P(x)e^{\alpha x}dx$ όπου $P(x)$ πολυώνυμο του x και $\alpha\in R^*$.-

Σ΄ αυτή τη περίπτωση αντικαθιστώ το $e^{\alpha x}=\left(e^{\alpha x}\right)'$ και ολοκληρώνω κατά παράγοντες

2η Περίπτωση Ολοκληρώματα της μορφής $\int_{\alpha}^{\beta}P(x)\eta\mu(\alpha x)dx$ $\int_{\alpha}^{\beta}P(x)\sigma\upsilon\nu(\alpha x)dx$

Σ΄ αυτή τη περίπτωση αντικαθιστώ το P(x) με τη παράγωγο μιας παράγουσας του δηλαδή $p(x)=\left(G(x)\right)'$ και ολοκληρώνω κατά παράγοντες

Παράδειγμα Θέτουμε $I=\int_{0}^{\pi}e^{x}\eta\mu(2x)dx$, οπότε έχουμε

$$I=\int_{0}^{\pi}(e^{x})'\eta\mu(2x)dx=\left[e^{x}\eta\mu(2x)\right]_{0}^{\pi}-2\int_{0}^{\pi}e^{x}\sigma\upsilon\nu(2x)dx=........$$

3η Περίπτωση Ολοκληρώματα της μορφής $\int_{a}^{b}P(x)\ln(\alpha x)dx$ όπου $P(x)$ πολυώνυμο του x και $\alpha\in R^*$

Σ΄ αυτή τη περίπτωση αντικαθιστώ το P(x) με τη παράγωγο μιας παράγουσας του δηλαδή $p(x)=\left(G(x)\right)'$ και ολοκληρώνω κατά παράγοντες

Παράδειγμα $\int_{1}^{2}(4x^3+1)\ln x dx=\int_{1}^{2}(x^4+x)'\ln x dx=\left[(x^4+x)\ln x\right]_{1}^{2}-\int_{1}^{2}(x^4+x)\frac{1}{x}dx$

3. ΤΙ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΠΡΟΣΕΧΩ ΣΤΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος

Α. Αν παρατηρούμε ότι στο ολοκλήρωμα **υπάρχει μια συνάρτηση και η παράγωγός της** τότε **μάλλον** χρειάζεται να κάνουμε **αντικατάσταση.**

Β. Αν παρατηρούμε ότι υπάρχει παράσταση της μορφής $f^{/}(x)g(x)$ τότε **μάλλον** χρειάζεται να κάνουμε **κατά παράγοντες**.

Γ. Αν παρατηρούμε παράσταση της μορφής $f(g(x))$ τότε **μάλλον** χρειάζεται **αντικατάσταση** το $g(x)$

Δ. Να μην ξεχνάμε, στο ολοκλήρωμα, **να αλλάζουμε τα όρια ολοκλήρωσης** όταν κάνουμε αντικατάσταση.

Ζ. Να μην ξεχνάμε το **απόλυτο στη συνάρτηση** όταν υπολογίζουμε εμβαδό χωρίου και βέβαια ότι το εμβαδό είναι θετικός αριθμός!!

ΟΡΙΣΜΕΝΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

Δ. Αν μία συνάρτηση f είναι **περιττή** στο διάστημα [-α,α] τότε $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(\chi)d\chi = 0$.

Ε. Αν μία συνάρτηση f είναι **άρτια** στο διάστημα [-α,α] τότε

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 2\int_{0}^{\alpha} f(x)dx .$$

Ξ. Όταν έχουμε το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης f και ο τύπος της περιέχει την παράσταση $\sqrt{\alpha^2-\chi^2}$ ή την παράσταση $\alpha^2+\chi^2$ συνήθως κάνουμε αλλαγή μεταβλητής. Στην πρώτη περίπτωση θέτουμε $\chi = \alpha.\eta\mu t$ και στη δεύτερη $\chi = \alpha.\varepsilon\varphi t$. Όταν κάνουμε αλλαγή μεταβλητής να μην ξεχνάμε να αλλάζουμε τα όρια ολοκλήρωσης.

Ο μετασχηματισμός αυτός ***(u=-x)*** *χρησιμοποιείται επειδή τα άκρα είναι αντίθετα*

Ασκήσεις Αλλαγή μεταβλητής

1) Να υπολογιστεί $\int_{0}^{3} \frac{x+2}{\sqrt{x+1}}dx$

Υπόδειξη Θέτουμε $\sqrt{x+1} = y \Leftrightarrow x = y^2+1 \Leftrightarrow dx = 2ydy$
Για χ=0 έχω y=1 , για x=3 , έχω y=2 κλπ

2) Να υπολογιστεί $\int_{0}^{1} x\ln(x^2+9)dx$

Υπόδειξη Θέτουμε $u = x^2+9 \Leftrightarrow du = 2xdx$
Για χ=0 έχω y=9 , για x=1 , έχω y=10 κλπ

3) Να υπολογιστεί $I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{2^{\eta\mu x}+1}dx$

Υπόδειξη: Θέτουμε u=-x dx=-du
Για χ=-π έχω u=π , για x=π , έχω u=-π

Έχω $I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{2^{\eta\mu x}+1}dx \Leftrightarrow -\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sigma\upsilon\nu^2(-u)}{2^{\eta\mu(-u)}+1}du$

$$\Leftrightarrow -\int_{\pi}^{-\pi}\frac{\sigma\upsilon\nu^2 u}{2^{-\eta\mu u}+1}du \Leftrightarrow \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sigma\upsilon\nu^2 u}{\frac{1}{2^{\eta\mu u}}+1}du \Leftrightarrow \int_{-\pi}^{\pi}\frac{2^{\eta\mu u}\sigma\upsilon\nu^2 u}{1+2^{\eta\mu u}}du$$

Άρα έχουμε

$$\begin{cases} I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{2^{\eta\mu x}+1}dx \\ I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2^{\eta\mu u}\sigma\upsilon\nu^2 u}{1+2^{\eta\mu u}}du \end{cases} \Leftrightarrow 2I=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{2^{\eta\mu x}+1}+\frac{2^{\eta\mu u}\sigma\upsilon\nu^2 u}{1+2^{\eta\mu u}}\right)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sigma\upsilon\nu^2 u(1+2^{\eta\mu u})}{2^{\eta\mu u}+1}du$$

$$2I=\int_{-\pi}^{\pi}\sigma\upsilon\nu^2 u du$$