Θέμα 1

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\left[0,1\right]\to R$ τέτοια ώστε για κάθε πραγματικό αριθμό $\chi\in\left[0,1\right]$ να ισχύει: $f^{2003}(\chi)+2002f(\chi)=2003\chi$.

α. Να δείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη της *f* .

β. Να δείξετε ότι f(0)=0 και f(1)=1

γ. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} και να δείξετε ότι: $f^{-1}(\chi)=\dfrac{\chi^{2003}+2002\chi}{2003}$, για κάθε πραγματικό αριθμό χ που ανήκει στο πεδίο ορισμού της.

δ. Αν Ε(Ω) είναι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} και f(x)>x όταν x $\in$ (0,1)να δείξετε ότι: Ε(Ω) = $\dfrac{1001}{1002\cdot 2003}$ τετραγωνικές μονάδες.

Θέμα 2

Δίνεται συνάρτηση *f* συνεχής στο πεδίο ορισμού της Δ = [α , β] , για την οποία ισχύουν τα παρακάτω:

i. Η *f* δεν είναι «1 -1» .
ii. Η *f* είναι παραγωγίσιμη στο (α , β).
iii. Η *f* είναι κυρτή στο Δ.
iv. f(α) < f(β).

Να δείξετε ότι υπάρχει $\chi_0 \in$ (α , β) για το οποίο ισχύουν:

α. Η γραφική παράσταση της *f* έχει στο σημείο της (χ_0 , f(χ_0)) έχει οριζόντια εφαπτομένη.

β. Η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης είναι ο αριθμός f(χ_0) .

γ.Η εξίσωση f(χ)=κ έχει δύο ακριβώς ρίζες στο Δ , αν κ$\in$ (f(χ_0) , f(α)) και μοναδική ρίζα στο Δ αν κ$\in$ (f(α) , f(β)).

Θέμα 3

Δίνεται συνάρτηση *f* με πεδίο ορισμού το σύνολο Α παραγωγίσιμη και **γνησίως αύξουσα** στο διάστημα Δ $\subseteq$ Α .

Οι παρακάτω προτάσεις μπορεί να είναι **σωστές** μπορεί όμως να είναι και **λάθος**. Ποιες είναι οι σωστές και ποιες οι λάθος.

i. Η συνάρτηση *f* είναι «1 – 1»
ii. Ισχύει $f\,'(\chi)>0$ για κάθε χ $\in$ Δ.
iii. Ισχύει $f\,'(\chi) \geq 0$ για κάθε χ$\in$ Δ.
iv. Υπάρχει $\chi_0 \in$ Δ τέτοιο ώστε $f\,'(\chi_0) > 0$.
v. Μπορεί να υπάρχει $\chi_0\in$ Δ τέτοιο ώστε $f\,'(\chi_0) = 0$.
vi. Υπάρχει $\chi_0 \in$ Δ τέτοιο ώστε $f\,'(\chi_0) < 0$.

Θέμα 4 (Μιγαδικοί- ασύμπτωτες)

Δίνονται οι συναρτήσεις *f , g* παραγωγίσιμες στο (0 , +∞) για τις οποίες ισχύει:

$f(x)=g(x)+\alpha x e^{\frac{1}{x}}$ για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό χ.

Ο αριθμός α είναι ένας αρνητικός πραγματικός και ο β ο θετικός πραγματικός αριθμός για τον οποίο ισχύει: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\beta$.

α. Να δείξετε ότι η ευθεία ψ = αχ + α + β είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης *f* όταν $x\to+\infty$.

β. Αν η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z = α + βi βρίσκεται στην ασύμπτωτη ευθεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης *f* όταν $\chi \to +\infty$ και το μέτρο του είναι $\sqrt{2}$ να γράψετε τους μιγαδικούς αριθμούς $w_1 = \dfrac{z^2}{2}$ και $w_1 = \dfrac{z^{2003}}{2^{1001}}$ στη μορφή χ + ψi.

Θέμα 5

Αν g(x)=2+$\displaystyle\int_a^x \frac{f(t)}{x}dt$ x$\in$(0,+∞) και $\displaystyle\int_a^\beta f(x)dx = 0$ Να δειχθεί ότι :

1) Υπάρχει $\chi_0 \in$(α,β) ώστε g′(x_0)=0
2) Ισχύει ότι g(x_0)=2+f(x_0)

Θέμα 6

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f : (0,+∞) →R με f(x)$\neq$0 για κάθε χ>0 και

$z_1 = a^2 + if(a)$, $z_2 = \dfrac{1}{\beta^2} + i\dfrac{1}{f(\beta)}$ όπου 0<α<β για τους οποίους $|z_1 + \overline{z_2}| = |z_1 - \overline{z_2}|$

Να αποδείξετε ότι :

1) Re($z_1 z_2$)=0
2) Υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ$\in$(α,β) τέτοιος ώστε να ισχύει : ξf ‘(ξ)=2f(ξ)

Θέμα 7

Δίδονται οι μιγαδικοί αριθμοί z(x)=e^x+(x-1)i x$\in$R . Να αποδείξετε ότι υπάρχει :

1) Ακριβώς μία τιμή του χ για την οποία το |Z| να γίνεται ελάχιστο.
2) Ένας τουλάχιστον $\chi_0 \in$ (0,1) τέτοιος ώστε ο αριθμός $w = z^2(x) + i\overline{z(x)}$

Θέμα 8(*Από το περιοδικό Β΄ Ευκλείδης 2004 τ. 51*)

Έστω συνάρτηση *f* η οποία είναι συνεχής στο [α , β] παραγωγίσιμη στο (α , β) και κυρτή στο [α , β]. Αν *f(α)<f(β)* να δείξετε ότι:

1) υπάρχει $x_0 \in$ (α , β) τέτοιο ώστε: $f(x_0) = \dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$.

2) υπάρχουν $x_1 \in$ (α , β) και $x_2 \in$ (α , β) τέτοια ώστε:
$$\frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} = 2 \cdot \frac{\beta - \alpha}{f(\beta) - f(\alpha)}$$

Θέμα 9

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [0\ ,\ +\infty) \to R$ με f(0)=0, και η

συνάρτηση $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{f(\frac{x}{t})}{t}dt$, χ>0

a. Να δείξετε ότι η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό χ και να υπολογίσετε την F΄(χ).
b. Αν η *f* ΄ είναι γνησίως φθίνουσα στο [0 , +∞) και *f* ΄(0)<0 να δείξετε ότι η F είναι γνησίως φθίνουσα στο (0 , +∞)

Θέμα 10

Έστω η παραγωγίσιμη , κυρτή συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \to R$ και μ , ν θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Να δείξετε:

Α) Για κάθε *x* $\in$ (α , β) ισχύει: $\dfrac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} < \dfrac{f(\beta) - f(x)}{\beta - x}$

Β) $f\left(\dfrac{\mu\alpha + \nu\beta}{\mu + \nu}\right) < \dfrac{\mu f(\alpha) + \nu f(\beta)}{\mu + \nu}$

Θέμα 11 (4η Δέσμη 1998)
Δίνεται η συνάρτηση φ(t)=2t+μ , t ε IR, όπου η παράμετρος μ είναι ένας πραγματικός αριθμός . Μια επιχείρηση έχει έσοδα E(t) που δίνονται σε χιλιάδες ευρώ , με τον τύπο: E(t)=(t-1)φ(t) , t≥0, όπου t συμβολίζει το χρόνο σε έτη. Το κόστος λειτουργίας της επιχείρησης δίνεται , σε χιλιάδες ευρώ, από τον τύπο K(t) = φ(t+4) , t≥0.
α. Να βρείτε τη συνάρτηση κέρδους P(t) , t≥0 , όταν γνωρίζουμε ότι η επιχείρηση κατά το πρώτο έτος λειτουργίας παρουσίασε ζημιά 12 χιλιάδες ευρώ.
β. Ποια χρονική στιγμή η επιχείρηση θα αρχίσει να παρουσιάζει κέρδη;
γ. Ποιος θα είναι ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους στο τέλος του δεύτερου έτους;
δ. Να υπολογίσετε την τιμή του ολοκληρώματος $\frac{111}{2}\int_0^6 P(t)dt$.

Θέμα 12(θ-Fermat -4η Δέσμη 2001)
Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R με f΄(0) = 1 και τέτοια ώστε να ισχύει:
$\int_0^x f(t)dt \geq xe^{-x}$, για κάθε x∈R. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής

παράστασης της f στο σημείο Α(0,f(0)).

Θέμα 13 Μια βιομηχανία για τις χ μονάδες παραγωγής ενός προϊόντος έχει κόστος Κ(χ) = $e^{α}χ^2$ χιλιάδες ευρώ για κάθε μονάδα παραγωγής , με χ ∈ (0 , +∞) και α ∈ [$\ln\frac{1}{\sqrt{13500}}$, 1].
Τα έσοδα από την πώληση των χ μονάδων του παραγόμενου προϊόντος δίνονται από την συνάρτηση Ε(x) = x^2 , x ∈ (0 , +∞).
α) Να υπολογίσετε το κέρδος Ρ(χ) της βιομηχανίας που προκύπτει από το κόστος παραγωγής και την πώληση των χ μονάδων του προϊόντος.
β) Να υπολογίσετε τις μονάδες χ που πρέπει να παράγει η βιομηχανία ώστε να έχει μέγιστο κέρδος.
γ) Να υπολογίσετε την τιμή του α ε [$\ln\frac{1}{\sqrt{13500}}$, 1] για την οποία το μέγιστο κέρδος της βιομηχανίας γίνεται μέγιστο και να υπολογίσετε αυτό το μέγιστο κέρδος .

Θέμα 14(Πανελλήνιες 2000)
Φάρμακο χορηγείται σε ασθενή για πρώτη φορά. Έστω f(t) η συνάρτηση που περιγράφει τη συγκέντρωση του φαρμάκου στον οργανισμό του ασθενούς μετά από χρόνο t από τη χορήγησή του, όπου t ≥ 0 . Αν ο ρυθμός μεταβολής της f(t) είναι $\frac{8}{t+1}-2$
α) Να βρείτε τη συνάρτηση f(t).
β) Σε ποια χρονική στιγμή t, μετά τη χορήγηση του φαρμάκου, η συγκέντρωσή του στον οργανισμό γίνεται μέγιστη;
γ) Να δείξετε ότι κατά τη χρονική στιγμή t = 8 υπάρχει ακόμα επίδραση του φαρμάκου στον οργανισμό, ενώ πριν τη χρονική στιγμή t = 10 η επίδρασή του στον οργανισμό έχει μηδενιστεί. (Δίνεται ln11 ≅ 2,4).

Θέμα 15.
Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$, η συνάρτηση

$F(x)=\int_1^x \frac{f(\frac{x}{t})}{t}dt$, χ>0 και οι μιγαδικοί αριθμοί z = α +i*f*(α) , w = *f*(β) + iβ , όπου α, β θετικοί πραγματικοί αριθμοί.

α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό χ και να υπολογίσετε την F΄(χ).

β. Αν $\int_{a}^{\beta} F''(\chi)dx = 0$ να δείξετε ότι: Re(zw) =0.

γ. Αν $\int_{1}^{e} f'(x)\ln x dx = \int_{e}^{1} F'(x)dx$ και η F είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$, να δείξετε:

i. f(e) = 0

ii. F(χ) $\geq$ F(e) για κάθε χ ∈ $(0, +\infty)$

Θέμα 16

Δίνεται η συνάρτηση f(x)= $\dfrac{(\mu-2)(x^2-1)+\ln(1-x)}{x^2}$

1) Να βρείτε το Πεδίο ορισμού της και την τιμή του πραγματικού αριθμού μ ώστε $\lim_{x\to+0} f(x) = \lambda \in R$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε το όριο αυτό.
2) Για την τιμή του μ που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα , να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
3) Να υπολογίσετε το $\lim_{x\to-1^+} \int_{-\frac{1}{2}}^{-1} e^{\frac{1}{x+1}} f(t)dt$

Θέμα 17

Α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $a^x=(a-1)x+1$ a>0 , a$\neq$1 έχει ακριβώς δύο πραγματικές ρίζες

Β. Εστω f δύο φορές παραγωγίσιμη στο (0,π) με $f'(\frac{\pi}{2})=0$ $\kappa\alpha\iota$ $f(\frac{\pi}{2})=1$. Αν f ''(x)+f(x)=0 για κάθε x∈(0,π) να δείξετε ότι f(x)=ημχ για κάθε x ∈(0,π)

ΘΕΜΑ 18^ο

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α , β με α < β και αβ ≠ 0.
Έστω μια συνάρτηση *f* : [α , β] →R συνεχής στο [α , β] και οι μιγαδικοί αριθμοί z = α^2 + i*f*(α), w = *f*(β) + iβ^2.

α. Αν $|w|^2 + |z|^2 = |w - z|^2$ να αποδείξετε:

i. $\mathrm{Re}(z\overline{w}) = 0$

ii. Η εξίσωση *f*(χ) = 0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα [α , β].

β. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο (α , β) και ο αριθμός w + iz είναι φανταστικός να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο (ξ , *f*(ξ)) ,με ξ ∈ (α , β) , της γραφικής παράστασης της *f* στο οποίο εφάπτεται ευθεία παράλληλη στον χ΄χ.

ΘΕΜΑ 19^ο

Η θέση ενός κινητού πάνω στο μιγαδικό επίπεδο προσδιορίζεται από την εικόνα του μιγαδικού z για τον οποίο ισχύει: $z - \dfrac{2}{\overline{z}} = 0$.

α. Να δείξετε ότι το κινητό εκτελεί κυκλική κίνηση.

β. Να βρείτε τις θέσεις του κινητού για τις οποίες ισχύει: $z+\overline{z}=0$, και στη συνέχεια να δείξετε ότι τις χρονικές στιγμές κατά τις οποίες το κινητό βρίσκεται στις θέσεις αυτές ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του είναι 0.

ΘΕΜΑ 20^0

Α. Έστω f συνεχής στο [α, β] και οι μιγαδικοί $z=\alpha^2+if(\alpha)$ και

$w=\beta^2-if(\beta)$ με $\alpha\beta\neq 0$ και $f(\alpha)f(\beta)\neq 0$ αν ισχύει $|\overline{w}+z|<|w-\overline{z}|$ και

f(α)<f(γ)<f(β) να δείξετε ότι :

i) υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$

ii)υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_1)=f(\gamma)$

ΘΕΜΑ 21^O

Αν για τον μιγαδικό αριθμό z = α+βi ισχύει: $|z|=\left|z+\frac{1}{z}\right|$, να αποδείξετε ότι:

i) $\mathrm{Re}(z^2)=-\frac{1}{2}$

ii) Με δεδομένη τη σχέση του ερωτήματος (i), αν επιπλέον f(2)=α>0, f(3)=β και α>β, να αποδείξετε ότι: υπάρχει $x_0\in(2,3)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$.

Θέμα 22 (όρια και Ολοκλήρωμα)

Αν $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ τότε i) $f(t)\le\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\quad\forall t\in[x,x+1]\ ,x>0$

ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}f(t)dt=0$

Θέμα 23^o (Συνέπειες-ασύμτωτοι-Μπαραλός 15/σελ61)

Να βρεθεί η συνάρτηση f όταν για κάθε χ>0 ισχύει $f''(x)=\frac{1}{x^3}$ και η C_f δέχεται ασύμπτωτο στο $+\infty$ την ευθεία y=3x-4

Θέμα 24^o

Να δειχθεί ότι ο $w=\frac{z_1^\nu+z_2^\nu}{(z_1+z_2)^\nu}\quad \nu\in\mathbb{N}^*$ είναι πραγματικός αριθμός αν $z_1,z_2\in C$ και $|z_1|=|z_2|=1$

Θέμα 25^o

Δίνεται η συνάρτηση f :R→R δύο φορές παραγωγίσιμη με $\int_1^x tf'(t)dt=f(x)+\int_1^x f(t)dt$ και f(0)=-1 Να δείξετε ότι :

1) f(x)=x-1 για κάθε χ∈R
2) Το εμβαδό Ε(Ω) που περικλείεται ανάμεσα στην g(x)=xf(x) , τον άξονα χχ' και τις ευθείες χ=-1 και χ=1

Θέμα 26

Έστω μια συνάρτηση συνεχής στο R για την οποία ισχύει ότι $\int_{2007}^{x}\left(\int_{2006}^{t}f(u)du\right)dt\ge x-2007$ και $f(x)\ge 0$. Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου Ω οπου περικλείεται από την γραφική παράσταση της f τον άξονα χχ' και τις ευθείες χ=2006 και χ=2007

Θέμα 27 (ΘΜΤ)

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f :[1.,2] → R για την οποία ισχύει : $f'(x)=\dfrac{9f^2(2)+f^2(1)+10}{6}$ (1) για κάθε χ∈[1,2].Να βρείτε τον τύπο της f

Θέμα 28

Θεωρούμε μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f: [α,β] →R με θετικούς πραγματικούς α και β και α<β και τους μιγαδικούς αριθμούς z=f(α)+iα και w=f(β)+iβ ώστε $\frac{w}{z}\in R$

1) Να αποδειχθεί ότι |w+4iz|=|w-4iz|
2) Να αποδειχθεί ότι υπάρχει εφαπτομένη της Cf που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
3) Αν ισχύει $\lim_{x\to a}\int_a^x \frac{f(2x+a-2t)}{(x-a)(2x+a-2t)}dt=1$ Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f′(x)=1 έχει τουλάχιστον μία λύση στο διάστημα (α,β)

Λύσεις Θεμάτων

Λύση θέματος 1

α) $f^{2003}(\chi_1)+2002f(\chi_1)=2003\chi_1$

$f^{2003}(\chi_2)+2002f(\chi_2)=2003\chi_2$

Άρα $f^{2003}(\chi_1)-f^{2003}(\chi_2)+2002[f(\chi_1)-f(\chi_2)]=2003(\chi_1-\chi_2)$

$[f(\chi_1)-f(\chi_2)][f^{2002}(\chi_1)+f^{2001}(\chi_1)f(x_2)...f^{2002}(\chi_2)]+2002[f(\chi_1)-f(\chi_2)]=2003(\chi_1-\chi_2)$

$[f(\chi_1)-f(\chi_2)][f^{2002}(\chi_1)+f^{2001}(\chi_1)f(x_2)...f^{2002}(\chi_2)+2002]=2003(\chi_1-\chi_2)$

Επομένως όταν f(x1)=f(x2) τότε χ1=χ2 άρα η f είναι 1-1 δηλαδή υπάρχει η αντίστροφη.

β) $f^{2003}(0)+2002f(0)=0\Rightarrow f(0)[f^{2002}(x)+2002]=0\Rightarrow f(0)=0$

$f^{2003}(1)+2002f(1)=2003\Rightarrow f^{2003}(1)+2002f(1)=2002+1\Rightarrow f^{2003}(1)-1+2002[f(1)-1]=0$

Εύκολα f(1)=1

γ) Πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το πεδίο τιμών της f .Άρα ΠΟf^{-1}=R

$f^{2003}(\chi)+2002f(\chi)=2003\chi\Rightarrow y^{2003}+2002y=2003x\Rightarrow x=\frac{y^{2003}+2002y}{2003}$ άρα $f^{-1}(x)=\frac{x^{2003}+2002x}{2003}$

δ) Επειδή η f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την y=x και επειδή η f είναι πάνω από την y=x σύμφωνα με το ερώτημα ε) Θα βρώ το Εμβαδό που βρίσκεται ανάμεσα στην y=x και την f^{-1} που τη γνωρίζω και μετά θα το διπλασιάσω.

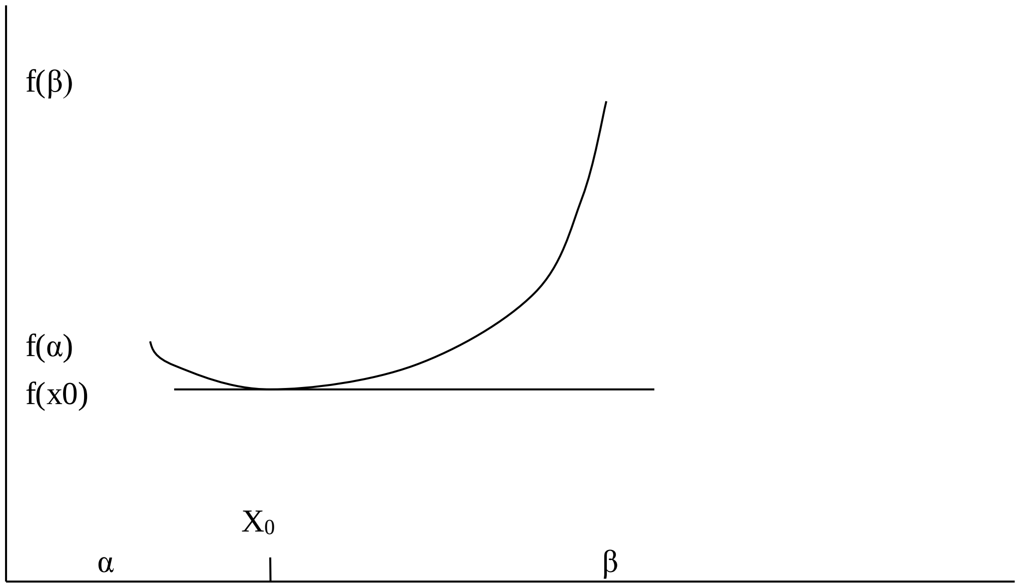
Άρα Ε(Ω)= $2\int_0^1 (x-\frac{x^{2003}+2002x}{2003})dx=........=\frac{1001}{1002.2003}$

Λύση του θέματος 2

α) Αφού η f δεν είναι 1-1 θα υπάρχουν χ1≠χ2 ⇒f(x1)=f(x2) άρα θ.Rolle υπάρχει χ0 ώστε f′(x0)=0 άρα η f έχει στο σημείο της (χ_0 , f(χ_0)) έχει οριζόντια εφαπτομένη

β) Αφού η κυρτή στο Δ η γραφική παράσταση θα είναι πάνω από την εφαπτομένη που είναι οριζόντια άρα η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης είναι ο αριθμός f(χ_0)

γ)



Α' Περίπτωση f(x0)<k<f(α)<f(β)
i) x∈(α,x0)
θεωρώ τη συνάρτηση g(x)=f(x)-k
g(α)=f(α)-κ <0
g(χ0)=f(x_0)-k>0 άρα Θ.bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα χ1 ώστε g(x1)=f(x1)-k=0 δηλ f(x1)=k
Δεν μπορεί να υπάρξει δεύτερο ώστε g(ρ)=0 διότι τότε σύμφωνα με θ.Rolle g(x1)=g(ρ)=0 θα είχαμε g'(ξ)=0 δηλαδή f '(ξ)=0 άτοπο διότι f'' (x)>0 άρα f' (x) γνησίως αύξουσα άρα 1-1
ii) x∈(x0,β)
θεωρώ τη συνάρτηση g(x)=f(x)-k
g(χ0)=f(x_0)-k<0
g(β)=f(β)-κ > 0
άρα Θ.bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $χ_2$ ώστε g(x_2)=f(x_2)-k=0 δηλ f(x_2)=k
Δεν μπορεί να υπάρξει δεύτερο ώστε g(ρ)=0 διότι τότε σύμφωνα με θ.Rolle g(x_2)=g(ρ)=0 θα είχαμε g'(ξ)=0 δηλαδή f '(ξ)=0 άτοπο διότι f'' (x)>0 άρα f' (x) γνησίως αύξουσα άρα 1-1
Β' Περίπτωση f(α)<κ<f(β)
θεωρώ τη συνάρτηση g(x)=f(x)-k
g(α)=f(α)-κ <0
g(β)=f(β)-k>0 άρα Θ.bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα χ0 ώστε g(x_0)=f(x_0)-k=0 δηλ f(x_0)=k
Δεν μπορεί να υπάρξει δεύτερο ώστε g(ρ)=0 διότι τότε σύμφωνα με θ.Rolle g(x_0)=g(ρ)=0 θα είχαμε g'(ξ)=0 δηλαδή f '(ξ)=0 **άτοπο** διότι f'' (x)>0 άρα f' (x) γνησίως αύξουσα άρα 1-1

<u>Λύση του θέματος 3</u>

i) Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα άρα είναι 1-1 επομένως i) → Σ
ii) → Λ (αντιπαράδειγμα η f(x)=x^3 που είναι γνησίως αύξουσα όμως f '(0)=0)
iii) Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα *f '(χ) ≥ 0* iii → Σ
iv) →Σ
v) → Σ
vi) → Λ

<u>Λύση θέματος 4</u>

α) Πρέπει $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a \ \ \kappa\alpha\iota \ \ \lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax\right]=a+\beta$

Πράγματι: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)+axe^{\frac{1}{x}}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}+\lim\limits_{x\to+\infty}ae^{\frac{1}{x}}=0+ae^0=a$

και $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)+axe^{\frac{1}{x}}-ax\right]=\lim_{x\to+\infty}g(x)+\lim_{x\to+\infty}\left[x(ae^{\frac{1}{x}}-a)\right]=$

$$\beta+\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha(e^{\frac{1}{x}}-1)}{\frac{1}{x}}=\beta+\alpha\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=\beta+\alpha\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=..=\alpha+\beta$$

β) Ο μιγαδικός z = α + βi βρίσκεται πάνω στην ευθεία ψ = αχ + α + β άρα:

$\begin{cases}\psi=ax+a+\beta\\ \psi=\beta\\ \chi=\alpha\end{cases}\Rightarrow\beta=\alpha^2+\alpha+\beta\Rightarrow\alpha^2+\alpha=0\Rightarrow\alpha(\alpha+1)=0\Rightarrow$ α=0 απορ και α=-1 δεκτό

$|z|=\sqrt{2}\Rightarrow\sqrt{a^2+\beta^2}=\sqrt{2}\Rightarrow\sqrt{1+\beta^2}=\sqrt{2}\Rightarrow 1+\beta^2=2\Rightarrow\beta^2=1$ άρα β=1 >0 Δεκτό ή β=-1 απορ

Άρα z=-1+i $\Rightarrow z^2=(-1+i)^2=1-1-2i=-2i$ Επομένως :

$$w_1=\frac{z^2}{2}=\frac{(-2i)}{2}=-i$$

$$w_2=\frac{z^{2003}}{2^{1001}}=\frac{z^{2.1001+1}}{2^{1001}}=\frac{z^{2.1001}z}{2^{1001}}=\frac{(-2i)^{1001}.z}{2^{1001}}=\frac{-2^{1001}i^{1001}}{2^{1001}}=-i^{1001}=....$$

<u>Λύση θέματος 5</u>

1) $g'(x)=\left(2+\frac{1}{x}\int_a^x f(t)dt\right)'=\left(\frac{1}{x}\right)'\int_a^x f(t)dt+\frac{1}{x}\left(\int_a^x f(t)dt\right)'=-\frac{1}{x^2}\int_a^x f(t)dt+\frac{1}{x}f(x)$

g(α)=2

g(β)=2 Θ.Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(\alpha,\beta)$ ώστε $g'(x_0)=0$

2) $g'(x_0)=-\frac{1}{x_0^2}\int_a^x f(t)dt+\frac{1}{x_0}f(x_0)=0\Leftrightarrow-\frac{1}{x_0}\int_a^x f(t)dt+f(x_0)=0\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\frac{1}{x_0}\int_a^x f(t)dt-f(x_0)=0\\ g(x_0)=2+\frac{1}{x_0}\int_a^x f(t)dt\end{cases}\Rightarrow g(x_0)-2-f(x_0)\Rightarrow g(x_0)=2+f(x_0)$$

<u>Λύση θέματος 6</u>

1)

$|z_1+\overline{z_2}|=|z_1-\overline{z_2}|\Rightarrow|z_1+\overline{z_2}|^2=|z_1-\overline{z_2}|^2\Rightarrow(z_1+\overline{z_2})(\overline{z_1+\overline{z_2}})=(z_1-\overline{z_2})(\overline{z_1-\overline{z_2}})\Leftrightarrow.....\Leftrightarrow z_1z_2=-\overline{z_1z_2}$

άρα z_1z_2 καθαρός φανταστικός δηλαδή $Re(z_1z_2)=0$

2) $z_1z_2=\left[a^2+if(a)\right]\left[\frac{1}{\beta^2}+i\frac{1}{f(\beta)}\right]=.......$

$Re(z_1z_2)=0\Rightarrow.........\frac{f(\alpha)}{a^2}=\frac{f(\beta)}{\beta^2}$

Θέλω $xf'(x)=2f(x)$

$$\Rightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=2\frac{1}{x}\Rightarrow(\ln f(x))'=(2\ln x)'\Rightarrow(\ln f(x))'-(2\ln x)'=0\Rightarrow\left(\ln f(x)-2\ln x\right)'=0$$

Δηλαδή $\left(\ln\dfrac{f(x)}{x^2}\right)^{'}=0$ Θεωρώ τη συνάρτηση

$$g(x)=\ln\frac{f(x)}{x^2}\Rightarrow\begin{cases} g(a)=\ln\dfrac{f(a)}{a^2}\\ g(\beta)=\ln\dfrac{f(\beta)}{\beta^2}\end{cases}\Rightarrow g(a)=g(\beta)$$ Θ. Rolle Υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ$\in$(α,β) τέτοιος ώστε να ισχύει g'(ξ)=0

$$g'(x)=\left(\ln\frac{f(x)}{x^2}\right)^{'}=\frac{1}{\frac{f(x)}{x^2}}\left(\frac{f(x)}{x^2}\right)^{'}=\frac{x^2}{f(x)}\frac{f'(x)x^2-2xf(x)}{x^4}=0\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{2}{x}\Leftrightarrow$$

ξf '(ξ)=2f(ξ)

<u>Λύση θέματος 7</u>

i) |z(x)|=$\sqrt{e^{2x}+x^2-2x+1}$ θέτω f(x)= $e^{2x}+x^2-2x+1$ και θα τη μελετήσω ως προς ακρότατα.

ΠΟ=R f'(x)=2e^{2x}+2x-2=2(e^{2x} +x-1) για να βρώ το πρόσημό της θα μελετήσω τη συνάρτηση g(x)= e^{2x} +x-1 παρατηρώ ότι g(0)=0

g'(x)=2 e^{2x}+1>0 άρα g $\uparrow$ αν χ>0$\Rightarrow$g(x)>g(0)=0

αν x<0$\Rightarrow$g(x)<g(0)=0

άρα για την f(x) θα έχω :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	
		□	τ. ε	□	

ii) Μετά από πράξεις Re(w)=e^{2x}-x^2+3x-2 Ζητούμε να αποδείξουμε ότι υπάρχει $\chi_0\in$ (0,1) τέτοιο ώστε η h(x)= e^{2x}-x^2+3x-2 γίνεται μηδέν

h(0)=-2<0

h(1)=e^2 >0 άρα Θ.Bolzano υπάρχει $\chi_0\in$ (0,1) τέτοιο ώστε η h(x$_0$)=0

<u>Λύση θέματος 8</u>

1) Το $\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}\in\left[f(a),f(\beta)\right]$ άρα θ.Ενδιάμεσων τιμών υπάρχει $x_0\in$ (α , β) ώστε

$$f(x_0)=\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$$

2) ΘΜΤ στο [α,χ0] τότε $f^{'}(x_1)=\dfrac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}=\dfrac{f(a)+f(\beta)-2f(a)}{2(x_0-a)}=\dfrac{f(\beta)-f(a)}{2(x_0-a)}$

ΘΜΤ στο [χ0,β] τότε $f^{'}(x_2)=\dfrac{f(\beta)-f(x_0)}{\beta-x_0}=\dfrac{2f(\beta)+f(\alpha)-f(\beta)}{2(\beta-x_0)}=\dfrac{f(\beta)-f(a)}{2(\beta-x_0)}$

Άρα $\dfrac{1}{f^{'}(x_1)}+\dfrac{1}{f^{'}(x_2)}=......=$

<u>Λύση του θέματος 9</u>

α) έχει λυθεί στο θέμα 15

β) $F^{'}(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ (1)

Επειδή η f' είναι γνησίως φθίνουσα θα έχω χ>0 $\Rightarrow$f'(x)<f'(0)<0 άρα η f $\downarrow$ δηλαδή χ>0 $\Rightarrow$f(x)<f(0)=0 $\Rightarrow$f(x)<0 οπότε από την (1) έχω ότι F'(x)<0 δηλαδή F $\downarrow$

Λύση του Θέματος 10

A) ΘΜΤ στο [α,χ] $\Rightarrow f'(\xi 1) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

ΘΜΤ στο [χ,β] $\Rightarrow f'(\xi_2) = \dfrac{f(\beta)-f(\chi)}{\beta-\chi}$

Επειδή f κυρτή $\Rightarrow$ f''(x)>0 $\Rightarrow$f'(x) ↑ άρα α<ξ1<χ<ξ2<β $\Rightarrow$f'(ξ1)<f'(ξ2) oed

B) ;;;;

Λύση θέματος 11

α) Για κάθε t$\geq$0 έχουμε : P(t) =E(t)- K(t) =(t-1)φ(t)-φ(t+4) = (t-1)(2t+μ)-(2(t+4)+μ) = = $2t^2$+μt-2t-μ-2t-8-μ = $2t^2$ +(μ-4)t-2μ-8 .Επειδή κατά το πρώτο έτος λειτουργίας η επιχείρηση παρουσίασε ζημιά 12 εκατομμύρια δραχμές θα είναι P(1)= -12 $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $2\cdot 1^2$ +(μ-4)$\cdot$1-2μ-8 = -12 $\Leftrightarrow$ μ=2 . Άρα P(t) = $2t^2$ +(2-4)t-2$\cdot$2-8 , δηλαδή P(t) = $2t^2$ -2t-12 , t$\geq$0 .

β) Η επιχείρηση παρουσιάζει κέρδη όταν P(t) > 0$\Leftrightarrow$ $2t^2$ -2t-12 > 0 $\Leftrightarrow$ t^2 -t-6 >0 $\overset{t\geq 0}{\Leftrightarrow}$ $\Leftrightarrow$ t > 3 . Άρα η επιχείρηση θα αρχίσει να παρουσιάζει κέρδη μετά το τέλος του τρίτου έτους .

γ) Ζητούμενο είναι το P΄(2) . Είναι P΄(t) = 4t-2 , t$\geq$0 .Άρα P΄(2) =4$\cdot$2-2 = 6 εκατομμύρια δραχμές / έτος .

δ) I = $\dfrac{111}{2}\int_0^6 P(t)dt = \dfrac{111}{2}\int_0^6 (2t^2-2t-12)dt = \dfrac{111}{2}[2\dfrac{t^3}{3}$ -t^2-12t $]_0^6$ = 1998 .

Λύση του θέματος 12

Θεωρούμε τη συνάρτηση g(x) = $\int_0^x f(t)dt$ - xe^{-x} , x$\in$R.Παρατηρούμε ότι g(0) = 0 ,

οπότε για κάθε x$\in$R έχουμε $\int_0^x f(t)dt \geq xe^{-x} \Rightarrow \int_0^x f(t)dt - xe^{-x} \geq 0 \Rightarrow$ g(x) $\geq$ g(0) .

Επομένως το g(0) = 0 είναι ολικό ελάχιστο της g και επειδή η g είναι παραγωγίσιμη στο R (διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων), σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα είναι g΄(0) = 0 (1) . Έχουμε g΄(x) = f(x) - e^{-x} + xe^{-x} , x$\in$R,

άρα g΄(0) = f(0) – 1 + 0 $\overset{(1)}{\Longrightarrow}$ 0 = f(0) – 1 $\Rightarrow$ f(0) = 1 . Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο A(0 , f(0)) είναι :

y – f(0) = f ΄(0)(x – 0) $\Leftrightarrow$ y – 1 = 1(x – 0) $\Leftrightarrow$ y = x + 1 .

ΛΥΣΗ θέματος 14

α) Για κάθε t ≥ 0 είναι f '(t) = $\frac{8}{t+1} - 2 \Leftrightarrow$ f '(t) = (8·ln(t +1) – 2t)' $\Leftrightarrow$

f(t) = 8·ln(t +1) – 2t + c , όπου c πραγματική σταθερά . Επειδή τη χρονική στιγμή t = 0 δεν υπάρχει συγκέντρωση του φαρμάκου στον οργανισμό θα είναι f(0) = 0 $\Leftrightarrow$ 8·ln(0 +1) – 2·0 + c = 0 $\Leftrightarrow$ c = 0 . Άρα f(t) = 8·ln(t +1) – 2t , t ≥ 0 .

β) Για κάθε t ≥ 0 είναι f '(t) = $\frac{8}{t+1} - 2 = \frac{-2(t-3)}{t+1}$, f '(t) = 0 $\Leftrightarrow$ t = 3 ,

f '(t) > 0 $\Leftrightarrow$ t $\in$ [0 , 3) και f '(t) < 0 $\Leftrightarrow$ t > 3 . Άρα η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση 3 το f(3) , επομένως η συγκέντρωση του φαρμάκου στον οργανισμό γίνεται μέγιστη τη χρονική στιγμή t = 3 .

γ) f(8) = 8·ln(8 +1) – 2·8 = 8(ln9 - 2) = 8(ln3^2 - 2) = 16(ln3 - 1) > 0 ,διότι 3 > e $\Rightarrow$ ln3 > lne $\Rightarrow$ ln3 > 1 . Άρα κατά τη χρονική στιγμή t = 8 υπάρχει ακόμα επίδραση του φαρμάκου στον οργανισμό .

f(10) = 8·ln(10 +1) – 2·10 = 8·ln11 – 20 $\cong$ 8·2,4 – 20 = -0,8 < 0.

Η f είναι συνεχής στο [8 , 10] και f(8)f(10) < 0 , άρα σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει χρονική στιγμή $t_o \in (8 ,10)$ τέτοια ώστε f(t_o) = 0 , δηλαδή τη χρονική στιγμή t_o η επίδραση του φαρμάκου στον οργανισμό έχει μηδενιστεί

<u>Λύση θέματος 15</u>

Μετά από πράξεις βρίσκω ότι Re(zw) =af(β)-βf(α)

α) f συνεχής άρα και η $\dfrac{f(\frac{x}{t})}{t}$ δηλαδή η F(x) παραγωγίσιμη.

Θέτω $\frac{x}{t} = u \Rightarrow t = \frac{x}{u} \Rightarrow dt = (\frac{x}{u})' du \Rightarrow dt = x(-\frac{1}{u^2})du$ άρα F(x)= $\int_1^x \frac{f(u)}{\frac{x}{u}} x(-\frac{1}{u^2})du = -\int_1^x \frac{f(u)}{u}du$

Για t=1 έχω u=x και για t=x έχω u=1 άρα F(x)= $-\int_x^1 \frac{f(u)}{u}du = \int_1^x \frac{f(u)}{u}du$

Επομένως $F'(x) = \frac{f(x)}{x}$

β) $\int_a^\beta F''(\chi)dx = 0 \Rightarrow \int_a^\beta (F'(x))'dx = 0 \Rightarrow F'(\beta) - F(a) = 0 \Rightarrow F'(\beta) = F'(a)$

τότε $\frac{f(\beta)}{\beta} = \frac{f(\alpha)}{\alpha} \Rightarrow \alpha f(\beta) - \beta f(a) = 0 \Rightarrow \mathrm{Re}(zw) = 0$

γ)

i) $\int_1^e f'(x)\ln x dx = \int_e^1 F'(x)dx \Rightarrow [f(x)\ln x]_e^1 - \int_1^e f(x)(\ln x)' dx = \int_e^1 F'(x)dx$

$$\Rightarrow f(1)\ln 1 - f(e)\ln e - \int_1^e \frac{f(x)}{x}dx = \int_e^1 F'(x)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -f(e)+\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx=\int_e^1 \mathrm{F}'(\mathrm{x})\mathrm{dx} \Rightarrow -f(e)+\int_e^1 \mathrm{F}'(\mathrm{x})\mathrm{dx}=\int_e^1 \mathrm{F}'(\mathrm{x})\mathrm{dx} \Rightarrow$$

f(e)=0

ii) Πρέπει να αποδείξω ότι F(e) είναι ελάχιστο

Μελέτη ως προς τα ακρότατα της F

X	0	e	$+\infty$
F′(x)	-		+
F(X)	$\searrow$	0	$\nearrow$

Ρίζες F′(x)$\Rightarrow \frac{f(x)}{x}=0 \Rightarrow f(x)=0 \Rightarrow x=e$

Αν x<e $\overset{F'\uparrow}{\Rightarrow} F'(x)<F'(e)=\frac{f(e)}{e}=0 \Rightarrow F'(x)<0$

Αx x>e $\overset{F'\uparrow}{\Rightarrow} F'(x)>F'(e)=\frac{f(e)}{e}=0 \Rightarrow F'(x)>0$ Άρα για χ=e η F παρουσιάζει ελάχιστο το F(e) δηλαδή F(x)$\geq$F(e)

<u>Λύση του θέματος 16</u>

1) Πρέπει χ$\neq$0 και 1-χ>0 αρα Π.Of=(-∞,0)$\cup$(0,1)

$f(x)=\frac{(\mu-2)(x^2-1)+\ln(1-x)}{x} \overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} xf(x)=(\mu-2)(x^2-1)+\ln(1-x)$ (1) Αλλά $\lim\limits_{x\to 0}\ln(1-x)=0$ και $\lim\limits_{x\to 0}\left[(\mu-2)(x^2-1)\right]=2-\mu$ και $\lim\limits_{x\to +0} f(x)=\lambda\in R$ άρα (1) έχω

$\lim\limits_{x\to 0} xf(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}[(\mu-2)(x^2-1)+\ln(1-x)] \Leftrightarrow 2-\mu=0 \Leftrightarrow \mu=2$ άρα $f(x)=\frac{\ln(1-x)}{x}$ τότε

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)}{x}(\frac{0}{0})=\frac{(\ln(1-x))'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-1}{1-x}=-1$

2) Για μ=2 έχω $f(x)=\frac{\ln(1-x)}{x}$ Παραγωγίσιμη ως πηλίκο και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων άρα $f'(x)=\left(\frac{\ln(1-x)}{x}\right)'=\frac{\frac{-x}{1-x}-\ln(1-x)}{x^2}=\frac{\frac{x}{x-1}-\ln(1-x)}{x^2}$

Θεωρώ τη συνάρτηση $g(x)=\frac{x}{x-1}-\ln(1-x)$ $\mu\varepsilon\ \chi<1$ $g'(x)=..=\frac{-x}{(x-1)^2}$

Πρόσημο Παραγώγου g′(x)>0 $\Leftrightarrow$ -x>0$\Leftrightarrow$ x<0 άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο (-∞,0) και γνησίως φθίνουσα στο [0,1)

Άρα για χ<0 $\Rightarrow$g(χ)<g(0) $\Leftrightarrow$ g(x)<0 και x>0 $\Leftrightarrow$ g(χ)<g(0) $\Leftrightarrow$ g(x)<0 τελικά η $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}<0$ για κάθε χ που ανήκει στο (-∞,0)$\cup$(0,1) . άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο ΠΟ

3) Αν t<0 $\Leftrightarrow$ -t>0 $\Leftrightarrow$ 1-t>1 $\Leftrightarrow$ ln(1-t)>0 τότε

$f(t)=\frac{\ln(1-t)}{t}<0\ \acute{o}\tau\alpha\nu\ t\in[-1,-\frac{1}{2}]\ \acute{\alpha}\rho\alpha \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} f(t)dt<0 \Leftrightarrow -\int_{-\frac{1}{2}}^{-1} f(t)dt>0 \Leftrightarrow$ Θέτουμε

$c=-\int_{-\frac{1}{2}}^{-1} f(t)dt>0$ Ακόμα $\lim_{x\to -1^+}\frac{1}{x+1}=+\infty \quad \kappa\alpha\iota \lim_{x\to -1^+} e^{\frac{1}{x+1}}=+\infty$ Τελικά

$\lim_{x\to -1^+}\int_{\frac{-1}{2}}^{-1} e^{\frac{1}{x+1}} f(t)dt=\lim_{x\to -1^+} e^{\frac{1}{x+1}}\int_{\frac{-1}{2}}^{-1} f(t)dt=c\lim_{x\to -1^+} e^{\frac{1}{x+1}}=+\infty$

Λύση θέματος 17

Α. Τα 0 και 1 είναι προφανείς ρίζες της εξίσωσης. Υποθέτουμε ότι η εξίσωση μία ακόμη ρίζα χ0 , διαφορετική από τα 0 και 1 . χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε 0<1<χ0

Θεωρούμε τη συνάρτηση : f(x)= $α^x$ - (α-1)x+1 $x\in R$. Με Θεώρημα Rolle στα διαστήματα [0,1] και [1,χ0], συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν $ξ1\in(0,1)$ και $ξ2\in(0,1)$ με f(ξ1)=f(ξ2)=0 . Δηλαδή θα υπάρχει $ξ\in(ξ1,ξ2)$ ώστε f '(ξ)=0 , που είναι άτοπο αφού f '(χ)=$α^x\ln^2 α$ >0 αφού $α\neq 1$

Β) f ''(x)+f(x)=0 ⇔ f ''(x)ημχ+f(x)ημχ=0 ⇔ $\int f''(x)\eta\mu x dx+\int f(x)\eta\mu x dx=c_1\Rightarrow$

$f'(x)\eta\mu x-\int f'(x)\sigma\upsilon\nu x dx-f(x)\sigma\upsilon\nu x+\int f'(x)\sigma\upsilon\nu x dx=c_1\Rightarrow f'(x)\eta\mu x-f(x)\sigma\upsilon\nu x=c_1\Rightarrow$

Για χ=π/2 έχουμε c1=0 οπότε έχουμε $\frac{f'(x)\eta\mu x-f(x)\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}=0\Leftrightarrow\left(\frac{f(x)}{\eta\mu x}\right)'=0$ άρα

$\frac{f(x)}{\eta\mu x}=c_2\Leftrightarrow f(x)=c_2\eta\mu x \;.....c_2=1\Rightarrow f(x)=\eta\mu x$

Λύση θέματος 18

α) i)

$|w|^2+|z|^2=|w-z|^2\Rightarrow w\overline{w}+z\overline{z}=(w-z)(\overline{w}-\overline{z})\Rightarrow ...w\overline{z}+z\overline{w}=0\Rightarrow$

$w\overline{z}+\overline{w\overline{z}}=0\Rightarrow \operatorname{Re}(w\overline{z})=0$

ii) $w\overline{z}=(f(\beta)+i\beta^2)(\alpha^2-if(a)=f(\beta)a^2+f(a)\beta^2+(f(a)f(\beta)+a^2\beta^2)i$

Επειδή $\operatorname{Re}(w\overline{z})=0\Rightarrow f(a)\beta^2+\alpha^2 f(\beta)=0\Rightarrow\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}=-\frac{\alpha^2}{\beta^2}<0\Rightarrow f(\alpha)f(\beta)<0$

Άρα θ Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $χ_0\in$ (α,β) ώστε $f(x_0)=0$

β) w+iz=[f(β)+iβ^2]+[α^2+if(α)].i =f(β)+iβ^2+iα^2-f(α) άρα f(α)-f(β)=0 δηλ f(α)=f(β) ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Rolle ώστε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in$ (α,β) ώστε f '($χ_0$)=0 Δηλαδή η Εφαπτομένη είναι παράλληλη στον χχ'

Λύση του θέματος 19

1) $z+\frac{2}{\overline{z}}=0\Rightarrow z\overline{z}-2=0\Rightarrow |z|^2=2\Rightarrow |z|=\sqrt{2}$ άρα κυκλική κίνηση με κέντρο (0,0) και ακτίνα r= $\sqrt{2}$

2) $z+\overline{z}=0\Rightarrow 2x(t)=0$ και επειδή $x^2+y^2=2\Rightarrow x^2(t)+y^2(t)=2\Rightarrow y(t)=\pm\sqrt{2}$

Αλλά $x^2(t)+y^2(t)=2\Rightarrow y(t)=\pm\sqrt{2-x^2(t)}\Rightarrow y(t)=\pm\sqrt{2}\Rightarrow y'(t)=0\Rightarrow y'(0)=0$

Λύση του θέματος 20

i) $|\overline{w}+z|<|w-\overline{z}|\Rightarrow|\overline{w}+z|^2<|w-\overline{z}|^2\Rightarrow(\overline{w}+z)\overline{(\overline{w}+z)}<(w-\overline{z})\overline{(w-\overline{z})}\Rightarrow$ ....

$2(\overline{wz}+wz)<0\Rightarrow\operatorname{Re}(wz)<0$ αφού $wz=(a^2+if(a))(\beta^2-if(\beta))=....=f(a)f(\beta)<-\alpha^2\beta^2<0$

Επομένως Θ.Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in$(α , β) τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$

ii) Θεωρώ τη συνάρτηση g(x)=f(x)-f(γ)

- Είναι συνεχής στο [α,β]

- g(α)=f(α) –f(γ)<0 και
- g(β)=f(β) –f(γ)>0 άρα g(α) g(β) <0 Θ.Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $g(x_1)=0$ f(x1)-f(γ)=0 άρα f(x1)=f(γ)

<u>Λύση θέματος 21</u>

i) $|z| = \left|z+\frac{1}{z}\right| \Leftrightarrow |z|^2 = \left|z+\frac{1}{z}\right|^2 \Leftrightarrow z\bar{z} = \left(z+\frac{1}{z}\right)\overline{\left(z+\frac{1}{z}\right)} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow z^2+\bar{z}^2 = -1$ τότε $(\alpha+\beta i)^2+(\alpha-\beta i)^2=-1$

Τότε … $\alpha^2-\beta^2=-\frac{1}{2}$ Αλλά $z^2=(\alpha+\beta i)^2=\alpha^2-\beta^2-2\alpha\beta i$ δηλαδή $Re(z^2)=\alpha^2-\beta^2=-\frac{1}{2}$

ii) f(2)f(3)=αβ α>0

Αν ήταν β>0 τότε α>β>0 $\Leftrightarrow \alpha^2>\beta^2 \Leftrightarrow \alpha^2-\beta^2>0$ άτοπο αφού $\alpha^2-\beta^2=-\frac{1}{2}<0$

Δηλαδή f(2)f(3)=αβ<0 άρα σύμφωνα με Θ.Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (2,3)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$

<u>Λύση θέματος 22</u>

i) Πρέπει να αποδείξω ότι f(t)≤f(x) όταν t>x δηλαδή αρκεί η f(x) να είναι γνησίως φθίνουσα

Πράγματι: $f'(x)=\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)' = \ldots = \frac{-x}{\sqrt{1+x^2}\,(1+x^2)}<0$ αφού χ>0 δηλαδή η f ↓

Άρα t>x$\Rightarrow f(t)\le f(x)$ το «=» ισχύει όταν t=x , δηλαδή f(t)≤f(x)

ii) Ισχύει 0 ≤ f(t)≤ $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ άρα

$$\int_x^{x+1} 0\,dt \le \int_x^{x+1} f(t)\,dt \le \int_x^{x+1}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dt \Leftrightarrow 0 \le \int_x^{x+1} f(t)\,dt \le \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\int_x^{x+1} dt$$

<u>Λύση θέματος 23</u>

$$f''(x)=\frac{1}{x^3} \Rightarrow \left(f'(x)\right)' = \left(x^{-3}\right)' = \left(\frac{x^{-3+1}}{-3+1}\right)' = \left(-\frac{1}{2x^2}\right)'$$ άρα

$$f'(x) = -\frac{1}{2x^2}+c_1 \Rightarrow f'(x) = \left(-\frac{1}{2}\frac{x^{-1}}{-1}+c_1x\right)' \Rightarrow f(x)=\frac{1}{2x}+c_1x+c_2$$

Αλλά $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=3 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2x^3}+c_1+\frac{c_2}{x}\right)=3\Rightarrow c_1=3$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-3x\right]=-4 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2x}+3x+c_2\right)=-4 \Rightarrow c_2=-4$ Δηλαδή $f(x)=\frac{1}{2x}+3x-4$

$0\le\int_x^{x+1} f(t)\,dt \le \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ άρα αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+1} f(t)\,dt = 0$

<u>Λύση θέματος 24</u>

$|z_1|=1 \Rightarrow |z_1|^2=1 \Rightarrow z_1\bar{z}_1=1 \Rightarrow \bar{z}_1=\frac{1}{z_1}$

Έχουμε $\overline{w}=\overline{\left(\dfrac{z_1^\nu+z_2^\nu}{(z_1+z_2)^\nu}\right)}=\dfrac{\overline{z_1^\nu+z_2^\nu}}{\overline{(z_1+z_2)^\nu}}=\dfrac{\overline{z_1}^\nu+\overline{z_2}^\nu}{(\overline{z_1}+\overline{z_2})^\nu}=\dfrac{\dfrac{1}{z_1^\nu}+\dfrac{1}{z_2^\nu}}{\left(\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}\right)^\nu}=\dfrac{\dfrac{1}{z_1^\nu}+\dfrac{1}{z_2^\nu}}{\dfrac{(z_1+z_2)^\nu}{(z_1z_2)^\nu}}=\dfrac{z_1^\nu+z_2^\nu}{(z_1+z_2)^\nu}=w$

Άρα w είναι πραγματικός αριθμός

<u>Λύση θέματος 25</u>

1) $\int_1^x tf'(t)dt=f(x)+\int_1^x f(t)dt \Rightarrow xf'(x)=f'(x)+f(x)\Rightarrow f''(x)(x-1)=0$ άρα

Αν χ=1 ικανοποιείται η αρχική σχέση

Αν χ$\neq$1 $\Rightarrow f''(x)=0\Rightarrow f'(x)=c\Rightarrow f(x)=c_1x+c_2$ Αλλά f(0)=-1 άρα c_2=-1

Για x=1 έχω f(1)=0 άρα c_1=1 δηλαδή f(x)=x-1

2)Ε(Ω)= $\int_{-1}^{1} g(x)dx=\int_{-1}^{1} xf(x)dx=\int_{-1}^{1} x(x-1)dx=\int_{-1}^{1}(x^2-x)dx$

Πρόσημο της $χ^2$-χ

		0		1	
	+		-		+

Άρα Ε(Ω)= $\int_{-1}^{0}(x^2-x)dx+\int_{0}^{1}(-x^2+x)dx=....$

<u>Λύση θέματος 26</u>

$\int_{2007}^{x}\left(\int_{2006}^{t} f(u)du\right)dt\geq x-2007 \Leftrightarrow \int_{2007}^{x}\left(\int_{2006}^{t} f(u)du\right)dt-x+2007\geq 0$ Θεωρούμε τη συνάρτηση g : R→R με τύπο g(x)= $\int_{2007}^{x}\left(\int_{2006}^{t} f(u)du\right)dt-x+2007$ για την οποία ισχύει g(x) $\geq$g(2007) άρα η g παρουσιάζει ελάχιστο στο χο=2007

Επειδή η f είναι συνεχής στο R , η $\int_{2006}^{t} f(u)du$ είναι παραγωγίσιμη στο R , οπότε και η g είναι παραγωγίσιμη στο R με $g'(x)=\int_{2006}^{x} f(u)du-1$ οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Fermat ισχύει g′(2007)=0 δηλαδή $\int_{2006}^{2007} d(u)du=1$ επειδή f(x)$\geq$0 το ζητούμενο εμβαδό θα είναι Ε(Ω)=1

<u>Λύση θέματος 27</u>

Η f είναι παραγωγίσιμη στο [1,2] άρα Θ.Μ.Τ. υπάρχει τουλάχιστον ένα χ0$\in$(1,2) τέτοιο ώστε

$f'(\xi)=\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}\Leftrightarrow f'(\xi)=f(2)-f(1)\overset{(1)}{=}\dfrac{9f^2(2)+f^2(1)+10}{6}\Leftrightarrow$

6f(2)-6f(1)=$9f^2(2)+f^2(1)+10\Leftrightarrow 9f^2(2)-6f(2)+1+f^2(1)+6f(1)+9=0\Leftrightarrow$

$(3f(2)-1)^2+(f(1)+3)^2=0$ δηλαδή 3f(2)-1=0 και f(1)+3=0 άρα f(2)=$\dfrac{1}{3}$ και f(1)=-3

Τώρα η σχέση (1) γίνεται $f'(x)=\dfrac{9\frac{1}{9}+9+10}{6}=\dfrac{10}{3}$ (2)

Η f είναι παραγωγίσιμη στο [1,2] άρα και στο [1,χ] με χ>1 σύμφωνα με ΘΜΤ υπέρχει ξ$\in$(1,χ) τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \Leftrightarrow f'(\xi)=\frac{f(x)+3}{x-1}=\frac{10}{3} \Leftrightarrow ....f(x)=\frac{10x-19}{3}$

Λύση θέματος 28

1) Έστω κ=$\frac{w}{z}\in R$ τότε w=kz (1) Επομένως |w+4iz|=|w-4iz|$\Leftrightarrow$ |kz+4iz|=|kz-4iz|$\Leftrightarrow$ |z(k+4i)|=|z(k-4i)| $\Leftrightarrow$ |z||k+4i|=|z||k-4i|$\Leftrightarrow$ |k+4i|=|k-4i| που ισχύει.

2) Επειδή $\frac{w}{z}\in R \Leftrightarrow \frac{w}{z}=\frac{\overline{w}}{\overline{z}} \Leftrightarrow w\overline{z}=z\overline{w} \Leftrightarrow (f(\beta)+i\beta)(f(a)-ia)=(f(\alpha)+i\alpha)(f(\beta)-i\beta) \Leftrightarrow$ ----- $\frac{f(\alpha)}{\alpha}=\frac{f(\beta)}{\beta}$ (1) Θεωρούμε τη συνάρτηση h(x)= $\frac{f(x)}{x}$, x$\neq$0

Η h είναι συνεχής στο [α,β] ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων

Η h είναι παραγωγίσιμη στο [α,β] ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων

Από την (1) ισχύει ότι h(α)=h(β) άρα σύμφωνα με θεώρημα Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $h'(x_0)=0$. Όμως

$$h'(x)=\frac{f'(x)x-f(x)}{x^2} \Leftrightarrow \frac{f'(x_0)x_0-f(x_0)}{x_0^2}=0 \Leftrightarrow f'(x_0)x_0-f(x_0)=0 \Leftrightarrow f'(x_0)=\frac{f(x_0)}{x_0} \quad (2)$$

Η εξίσωση εφαπτομένης είναι : $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow y-f(x_0)=\frac{f(x_0)}{x_0}(x-x_0) \Leftrightarrow ....$

$y=\frac{f(x_0)}{x_0}x$ που περνά από την αρχή των αξόνων.

3) $\lim\limits_{x\to a}\int_a^x \frac{f(2x+a-2t)}{(x-a)(2x+a-2t)}dt=1$ θέτω 2x+a-2t=u οπότε dt=(-1/2)du

Για t=α ,u=2x-α για t=x , u=α

$$\lim_{x\to a}\int_a^x \frac{f(2x+a-2t)}{(x-a)(2x+a-2t)}dt=1 \Leftrightarrow \lim_{x\to a}\int_{2x-a}^{a}\frac{f(u)}{(x-a)u}\left(-\frac{1}{2}\right)du=1 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{2}\frac{\int_a^{2x-a}\frac{f(u)}{u}du}{x-a}=1 \overset{L'Hospital}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{2}\lim_{x\to a}\frac{\frac{f(2x-a)}{2x-a}2}{1}=1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\frac{f(a)}{a}2=1 \Leftrightarrow \frac{f(a)}{a}=1$$

Τελικά $\frac{f(a)}{a}=\frac{f(\beta)}{\beta}=1$

Θεωρούμε τη συνάρτηση φ(χ)=f(x)-χ στο [α,β]

Ισχύει φ(α)=φ(β)=0 άρα σύμφωνα με θεώρημα Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ $\in$(α,β) τέτοιο ώστε φ΄(ξ)=0 όμως φ΄(χ)=f′(x)-1 άρα φ′(ξ)=0 δηλαδή f′(ξ)=1.