ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ Στα Ολοκληρώματα

1) Ανισοτική σχέση της μορφής → $\int_a^\beta f(x)dx \geq \int_a^\beta g(x)dx$

ΤΙ ΚΑΝΟΥΜΕ :

Α) Σχηματίζουμε τη διαφορά f(x)-g(x)

- Βρίσκουμε το πρόσημο της διαφοράς στο [α,β]
- Αν είναι $f(x)-g(x)\geq 0 \Rightarrow \int_a^\beta \left(f(x)-g(x)\right)dx \geq 0 \Rightarrow \int_a^\beta f(x)dx \geq \int_a^\beta g(x)dx$

Β) Αν δεν είναι εύκολο να βρούμε το πρόσημο της διαφοράς με αλγεβρικές μεθόδους:

- Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$
- Μελετούμε την h ως προς τη μονοτονία ή τα ακρότατα
- Με τη βοήθεια της μονοτονίας ή των ακρότατων αποδεικνύουμε την ανισότητα

2) Ανισοτική σχέση της μορφής → $\gamma \leq \int_a^\beta f(x)dx \leq \delta$

- Ξεκινώντας από τη σχέση $a \leq x \leq \beta$ εξετάζουμε μήπως μπορούμε να καταλήξουμε στη σχέση $m \leq f(x) \leq M$

- Μελετούμε τη συνάρτηση f ως προς τα ακρότατα , με τη βοήθεια της παραγώγου στο διάστημα [α,β] με στόχο να καταλήξουμε στην $m \leq f(x) \leq M$ Οπότε εύκολα πάμε στη σχέση : $m(\beta-\alpha) \leq \int_\alpha^\beta f(x)dx \leq M(\beta-\alpha)$

- Βρίσκω ανισοτική σχέση για την f(x) $a \leq f(x) \leq \beta$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μόνιμες ανισότητες όπως : $(a-\beta)^2 \geq 0$, $(a+\beta)^2 \geq 0$, $e^x \geq 1+x \;\; \forall x \in R$

$e^x \succ 1+x \;\; \forall x \in R^*$, $\ln x \leq x-1 \;\; \forall x \in R_+^*$, $a+\dfrac{1}{a} \geq 2 \;\; \forall a > 0$

Από τη σχέση ορούμε $a \leq f(x) \leq \beta$ πολλές φορές καταλήγουμε σε :
$[f(x)-a][f(x)-\beta] \leq 0 \Leftrightarrow$

3) Ανισοτική σχέση της μορφής : $\kappa_1 \leq \int_\kappa^\beta f(x)dx - \int_k^\alpha f(x)dx \leq \kappa_2 \;\; \mu\varepsilon \;\; \alpha \prec \beta$

Τότε : Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(t) = \int_\kappa^t f(x)dx \; , t \in [a,\beta]$ η αρχική ανίσωση γίνεται $\kappa_1 \leq F(\beta) - F(\alpha) \leq \kappa_2 \;\; \mu\varepsilon \;\; \alpha \prec \beta$ μετά εφαρμόζουμε το **Θ.Μ.Τ** για την F στο [α,β] οπότε υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$: $F'(\xi) = \dfrac{F(\beta)-F(a)}{\beta-\alpha} \Leftrightarrow f(\xi) = \dfrac{F(\beta)-F(a)}{\beta-\alpha}$ Χρησιμοποιώντας τη μονοτονία της f βρίσκομε τις ανισότητες που θέλουμε

4) Ανισοτική σχέση της $\int_a^x f(t)dt$ και Θεώρημα Fermat

Αν ισχύει μια ανισότητα που περιέχει τη συνάρτηση $\int_a^x f(t)dt$ τότε :

Μεταφέρομε όλους τους όρους στο α μέλος και ορίζουμε τη συνάρτηση g(x) . Τότε θα είναι :

$g(x) \geq 0$ ή $g(x) \leq 0$ βρίσκω ένα x_0 ώστε $g(x) \geq g(x_0)$ ή $g(x) \leq g(x_0)$ και εφαρμόζω το **θ.Fermat**

5) Ανισοτική σχέση της μορφής : $\int_a^{h(x)} f(t)dt \leq \int_a^{\varphi(x)} f(t)dt$ όπου f συνάρτηση με σταθερό πρόσημο

Θέτουμε $g(x) = \int_a^x f(t)dt$ με $g'(x) = f(x)$ τότε η ανίσωση γράφεται : $g(h(x)) \leq g(\varphi(x))$

ισχύει $g'(x) \succ 0$ ή $g'(x) \prec 0$ αφού η g διατηρεί πρόσημο . Χρησιμοποιούμε τη μονοτονία και αρκεί να αποδείξουμε ότι : $h(x) \leq \varphi(x)$ ή $h(x) \geq \varphi(x)$

6) Ανισοτική σχέση της $\int_a^{\beta} f(t)dt \prec \int_{\alpha}^{\Pi(\beta)} g(t)dt$ ή $\int_a^{\beta} f(t)dt < \Pi(\beta)$

Για να αποδείξουμε μια ανισότητα της παραπάνω μορφής :

Θέτουμε $F(x) = \int_a^x f(t)dt \prec \int_{\alpha}^{\Pi(x)} g(t)dt$ ή $F(x) = \int_a^x f(t)dt < \Pi(x)$

Μελετάμε την F ως προς τη μονοτονία και ακρότατα .

Εφαρμόζουμε τον ορισμό της μονοτονίας και αντικαθιστούμε όπου χ=β