4. Κανόνες De L’ Hospital

Μέρος 4

Περίπτωση $1^{η}$ (μορφή $\frac{0}{0}$):

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$, $x_0\in R$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=$ πεπερασμένο ή άπειρο ,

τότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Παραδείγματα

1. **Να βρεθεί το όριο:** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ημ2x}{ημ3x}$

Λύση: Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0} ημ2x=0$, $\lim\limits_{x\to 0} ημ3x=0$ και $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(ημ2x)'}{(ημ3x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2συν2x}{3συν3x}=\frac{2}{3}$.

Επομένως $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ημ2x}{ημ3x}=\frac{2}{3}$

2. **Να βρεθεί το όριο:** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x^3}$

Λύση: Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}(e^x-1)=0$, $\lim\limits_{x\to 0} x^3=0$ και $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{(x^3)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{3x^2}=+\infty$

Επομένως $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x^3}=+\infty$

3. **Να βρεθεί το όριο:** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$

Λύση: Έχουμε $\lim\limits_{x\to 1} \ln x = 0$, $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$ και $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(\ln x)'}{(x-1)'}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=1$ Επομένως $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}=1$

4. Να βρεθεί το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-2x}}{\ln(1+x)}$

Λύση: Έχουμε

$$\lim_{x\to 0}(e^x-e^{-2x})=0 \ , \ \lim_{x\to 0}\ln(1+x)=0 \text{ και } \lim_{x\to 0}\frac{(e^x-e^{-2x})'}{(\ln(1+x))'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+2e^{-2x}}{\frac{1}{1+x}}=\frac{3}{1}=3$$

Επομένως $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-2x}}{\ln(1+x)}=3$

5. Να βρεθεί το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-\text{συν}2x}{e^x-\text{συν}x}$

Λύση: Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-\text{συν}2x}{e^x-\text{συν}x}=\ldots=2$

Περίπτωση 2η (μορφή $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$):

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\pm\infty$, $x_0\in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ και υπάρχει το

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$=πεπερασμένο ή άπειρο , τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Παραδείγματα

1. Να βρεθεί το όριο: $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x}$

Λύση: Έχουμε $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty}x=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(\ln x)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x}=0$

Επομένως $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$

2. Να βρεθεί το όριο: $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2e^x+x^2+2x-1}{e^{-x}+4x+1}$

Λύση: Έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^x+x^2+2x-1}{e^{-x}+4x+1}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2e^x+x^2+2x-1)'}{(e^{-x}+4x+1)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^x+2x+2}{-e^{-x}+4}=+\infty$

3. Να βρεθεί το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\ln x}{e^x}$

Λύση: Έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\ln x}{e^x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+\ln x)'}{(e^x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\frac{1}{x}}{e^x}=0$

4. Να βρεθεί το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\ln x}$

Λύση: Έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\ln x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x)'}{(\ln x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$

Παρατήρηση:

Τα προηγούμενα θεωρήματα ισχύουν και για τις μορφές : $\dfrac{+\infty}{-\infty}$, $\dfrac{-\infty}{+\infty}$, $\dfrac{-\infty}{-\infty}$. Επίσης τα θεωρήματα αυτά ισχύουν και για πλευρικά όρια και μπορούν να εφαρμοστούν περισσότερες από μια φορές αρκεί να ισχύουν οι υποθέσεις των θεωρημάτων αυτών.

Περίπτωση 3η (Μορφή $\infty.0$)

Έστω το $\lim\limits_{x\to xo}[f(x)g(x)]$ όπου $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=+\infty\ ή -\infty$ τότε

$\lim\limits_{x\to xo}[f(x)g(x)]=\lim\limits_{x\to xo}\dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}\ ή \lim\limits_{x\to xo}\dfrac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$ και έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\dfrac{0}{0}\ ή \dfrac{\infty}{\infty}$

Παραδείγματα :

1) Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to0^+}(x\ln x)$

Λύση : Έχουμε $\lim\limits_{x\to0^+}(x\ln x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}(\dfrac{-\infty}{+\infty})=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{(x)'}{(\frac{1}{x})'}=\ldots=0$

2) **Να βρεθεί το όριο:** $\lim\limits_{x\to0^+}(x^3\cdot\ln^2 x)$ **(Μορφή** $0.\infty$)

Λύση: Έχουμε $\lim\limits_{x\to0^+}(x^3\cdot\ln^2x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln^2x}{\frac{1}{x^3}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{(\ln^2x)'}{(\frac{1}{x^3})'}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{-\frac{3x^2}{x^6}}=-\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2\ln x}{\frac{3}{x^3}}=$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{2\cdot\frac{1}{x}}{9x^2}}{x^6}=\frac{2}{9}\cdot\lim_{x\to 0^+}x^3=0$$

3) **Να βρεθεί το όριο:** $\lim_{x\to+\infty}[x\cdot(e^{\frac{1}{x}}-1)]$

Λύση: Έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty}[x\times(e^{\frac{1}{x}}-1)]=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^{\frac{1}{x}}-1)'}{(\frac{1}{x})'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}\times e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}}=1$$

Περίπτωση 4η (Μορφή $\infty-\infty$)

Έστω το $\lim_{x\to xo}[f(x)-g(x)]$ όπου $\lim_{x\to x_0}f(x)=+\infty(\acute{\eta}-\infty)$, $\lim_{x\to x_0}g(x)=+\infty\ (\acute{\eta}-\infty)$ το όριο αυτό μπορεί να γραφεί : $\lim_{x\to xo}[f(x)(1-\frac{g(x)}{f(x)})]$ ή $\lim_{x\to xo}[g(x)(\frac{f(x)}{g(x)}-1)]$ τότε αρκεί να βρούμε το $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ ή $\lim_{x\to xo}\frac{g(x)}{f(x)}$

Που έχει απροσδιόριστη μορφή $\frac{\infty}{\infty}$ αν το τελευταίο όριο ισούται με 1 , τότε έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\infty.0$

Παρατήρηση : Αν ένα από τα f(x) ή g(x) είναι κλάσμα τότε γίνονται οι πράξεις και καταλήγουμε στη μορφή $\frac{0}{0}\acute{\eta}\frac{\infty}{\infty}$

Παραδείγματα :

1) Να βρεθεί το $\lim_{x\to+\infty}(\ln x-x)$

Λύση Απροσδιόριστη μορφή $\infty-\infty$ άρα $\lim_{x\to+\infty}(\ln x-x)=\lim_{x\to+\infty}[x(\frac{\ln x}{x}-1)]$ το

$$\lim_{x\to+\infty}(\frac{\ln x}{x})=\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$ άρα $$\lim_{x\to+\infty}(\ln x-x)=\lim_{x\to+\infty}[x(\frac{\ln x}{x}-1)]=+\infty.(-1)=-\infty$$

2) **Να βρεθεί το όριο:** $\lim_{x\to 1}(\frac{e}{e^x-e}-\frac{1}{x-1})$ **(Σύμφωνα με παρατήρηση)**

Λύση: Έχουμε

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{e}{e^x - e} - \frac{1}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{ex - e - e^x + e}{(e^x - e)\cdot(x-1)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1}\frac{(ex - e^x)'}{[(e^x - e)\cdot(x-1)]'} = \lim_{x\to 1}\frac{e - e^x}{e^x\cdot x - e} \overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1}\frac{-e^x}{e^x\cdot x + e^x} = -\frac{1}{2}$$

Περίπτωση 5η (Μορφές $0^0, (+\infty)^0, 1^\infty$)

Έστω το $\lim\limits_{x\to xo}[f(x)]^{g(x)}$ που έχει μια από τις παρακάτω μορφές : $0^0, (+\infty)^0, 1^\infty$ τότε το όριο μετασχηματίζεται $\lim\limits_{x\to xo}[f(x)]^{g(x)} = \lim\limits_{x\to xo}(e^{\ln f(x)})^{g(x)} = \lim\limits_{x\to xo} e^{g(x)\ln f(x)}$ οπότε αρκεί να βρούμε το $\lim\limits_{x\to xo}[g(x)\ln f(x)] = L$ που έχει απροσδιόριστη μορφή $\infty.0$

Παραδείγματα :

1) Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$

Λύση $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = \lim\limits_{x\to 0^+}(e^{\ln x})^x = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln x}$ οπότε αρκεί να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0^+}(x\ln x)$ που είναι της μορφής $0.\infty$ και ισούται με 0 άρα $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = e^0 = 1$

2) Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-}(\eta\mu x)^{\varepsilon\phi x}$

Λύση Το παραπάνω όριο είναι της μορφής $1^{+\infty}$ άρα θα έχω :

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-}(\eta\mu x)^{\varepsilon\phi x} = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-}(e^{\ln \eta\mu(x)})^{\varepsilon\phi x} = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} e^{\varepsilon\phi x \ln \eta\mu x}$ οπότε αρκεί να βρούμε το όριο

: $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-}(\varepsilon\phi x \ln \eta\mu x)$ που είναι μορφή (+ $\infty.0$)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\varepsilon\phi\chi\ln\eta\mu\chi)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\frac{\ln\eta\mu\chi}{\frac{1}{\varepsilon\phi\chi}}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{(\ln\eta\mu\chi)'}{\left(\frac{1}{\varepsilon\phi\chi}\right)'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\frac{1}{\eta\mu\chi}(\eta\mu\chi)'}{\frac{-1}{\varepsilon\phi^2\chi}(\varepsilon\phi\chi)'}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\frac{\sigma\upsilon\nu\chi}{\eta\mu\chi}}{\frac{-1}{\varepsilon\varphi^2\chi}(\varepsilon\varphi\chi)'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\sigma\upsilon\nu^3\chi}{\frac{-1}{\varepsilon\varphi^2\chi}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\sigma\upsilon\nu^3\chi\varepsilon\varphi^2\chi}{\eta\mu\chi}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\sigma\upsilon\nu^3\chi\frac{\eta\mu^2\chi}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}}{\eta\mu\chi}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\sigma\upsilon\nu\chi\eta\mu\chi)=0$$

Άρα $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\eta\mu\chi)^{\varepsilon\phi\chi}=......=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}e^{\varepsilon\phi\chi\ln\eta\mu\chi}=e^0=1$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

Να υπολογίσετε τα όρια:

$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\ln x}$ $\quad\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{\eta\mu(x-2)}{x^2-4}$ $\quad\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\varepsilon\varphi(2005x)}{\varepsilon\varphi(2006x)}$ $\quad\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(x-\frac{\pi}{2})}{\varepsilon\varphi x}$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(e^x-x)$ $\quad\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(x-\ln x)$ $\quad\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\ln(\eta\mu x)}{\ln(\varepsilon\varphi x)}$ $\quad\displaystyle\lim_{x\to0}(x^\nu\cdot\ln x)\ ,\ \nu\in N^*$

$\displaystyle\lim_{x\to1}[(x-1)\varepsilon\varphi\frac{\pi x}{2}]$ $\quad\displaystyle\lim_{x\to0}x^x$ $\quad\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x^2\eta\mu x}{xe^{\alpha x}-\alpha x}$ $\quad\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2x^2}{x^4}$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{2006^x-2005^x}{x}$ $\quad\displaystyle\lim_{x\to+\infty}[\ln(e^x+1)-x]$ $\quad\displaystyle\lim_{x\to0^+}[x\cdot\ln(5x)]$ $\quad\displaystyle\lim_{x\to1}[\ln x\cdot\ln(\ln x)]$

$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x^2-\eta\mu x}{x}$ $\quad\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\ln^2(\eta\mu x)}{\ln^2(\varepsilon\varphi x)}$ $\quad\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\varepsilon\varphi x-x}{x^2}$ $\quad\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^{x^2}}$