ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΤΡΙΤΗ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2023
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$

Μονάδες 6

Α2. Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α. Πότε λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Rolle (μονάδες 3) και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία (μονάδες 2).

Μονάδες 5

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=1$.

β) Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης περιττού βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη.
γ) Για κάθε συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και γνησίως αύξουσα στο Δ, ισχύει ότι $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ.

δ) Αν η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι μια «ένα προς ένα» (“1-1”) συνάρτηση, τότε οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y=x που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x'Oy'.

ε) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι $f\circ g$ και $g\circ f$, τότε αυτές δεν είναι υποχρεωτικά ίσες.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=\frac{4-e^{2x}}{e^x}$ και η συνάρτηση $h:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $h(x)=\ln x$.

Β1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f=g\circ h$.

Μονάδες 5

Έστω $f(x)=\frac{4-x^2}{x}, x>0$.
Β2. i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία (μονάδες 4).

ii) Να αποδείξετε ότι $\frac{4-\pi^2}{4-e^2}>\frac{\pi}{e}$ (μονάδες 4).

Μονάδες 8

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

Β4. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)}{f(x)}$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\begin{cases} x^2-3x+3, x<1 \\ \dfrac{1}{x}+\alpha, x\geq 1 \end{cases}$.

όπου $\alpha\in R$, για την οποία γνωρίζουμε επιπλέον ότι $\int_2^3 xf(x)dx=1$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι α =0.

Μονάδες 4

Γ2. i) Να αποδείξετε ότι ορίζεται εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη x_0=1 (μονάδες 4).

ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) και τη γωνία που σχηματίζει η (ε) με τον άξονα x' x (μονάδες 4).

Μονάδες 8

Γ3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι «ένα προς ένα» (“1-1”) (μονάδες 3) και στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της (μονάδες 3).

Μονάδες 6

Γ4. Έστω $(\varepsilon): y=-x+2$ η εξίσωση της εφαπτομένης του ερωτήματος Γ2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f με $x\geq 1$, την ευθεία (ε), τον άξονα x ' x και την ευθεία x=e.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση $f:(0,2)\to R$ με τύπο: $f(x)=\ln(2-x)-\dfrac{1}{x}+\kappa$, όπου $\kappa\in R$

για την οποία ισχύει: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-2x}{x-1}=l\in R$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι κ=3.

Μονάδες 4

Δ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x) 0 = έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2 με (μονάδες 4) και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $x_1<\dfrac{1}{3}$(μονάδες 2).

Μονάδες 6

Στα παρακάτω ερωτήματα, x_1 και x_2 είναι οι ρίζες που αναφέρονται στο ερώτημα Δ2.

Δ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο $M(\xi, f(\xi))$, με $\xi \in (0,1)$ στο οποίο η κλίση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f ισούται με $\dfrac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}$.

Μονάδες 6

Δ4. Αν επιπλέον F και G είναι δύο αρχικές συναρτήσεις της συνάρτησης f στο διάστημα $(0,2)$ με $F(x_1)=G(x_2)=0$, να αποδείξετε ότι:

i) $F(x_2)+G(x_1)=0$ (μονάδες 4)

ii) η εξίσωση $x_1F(x)+x_2G(x)=x_1+x_2-2x$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα (x_1,x_2)

(μονάδες 5)

Μονάδες 9