

## (ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ)

**ΘΕΜΑ Α.**

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 111

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 104

Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 128

Α4.

α) Λάθος

β) Λάθος

γ) Λάθος

δ) Σωστό

ε) Σωστό

**ΘΕΜΑ Β.****B.1** Για το πεδίο ορισμού της  $f = g \circ h$ .

$$D_{g \circ h} = \{x \in D_h / h(x) \in D_g\} = \{x > 0 / \ln x \in \mathbb{R}\} = (0, +\infty)$$

Για τον τύπο της  $f$  έχουμε

$$f(x) = g(h(x)) = g(\ln x) = \frac{4 - e^{2\ln x}}{e^{\ln x}} = \frac{4 - e^{\ln x^2}}{x} = \frac{4 - x^2}{x}, x > 0$$

**B.2**i. Η  $f$  είναι συνεχής στο  $(0, +\infty)$  ως ρητή και παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  με

$$f'(x) = \frac{-2x \cdot x - (4 - x^2)}{x^2} = \frac{-2x^2 - 4 + x^2}{x^2} = \frac{-x^2 - 4}{x^2} = \frac{-(x^2 + 4)}{x^2} < 0$$

στο  $(0, +\infty)$ , οπότε η  $f$  γνήσια φθίνουσα στο  $(0, +\infty)$ .η  $f \downarrow$ 

$$\text{ii. Έχουμε: } \pi > e \Rightarrow f(\pi) < f(e) \Rightarrow \frac{4 - \pi^2}{\pi} < \frac{4 - e^2}{e} \Rightarrow$$

$$e \cdot (4 - \pi^2) < \pi \cdot (4 - e^2) \text{ διαιρούμε με } e \cdot (4 - e^2) < 0 \text{ οπότε προκύπτει: } \frac{4 - \pi^2}{4 - e^2} > \frac{\pi}{e}$$

**B.3.**Κατακόρυφη (υποψήφια η  $x = 0$ )

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4 - x^2}{x} = +\infty, \text{ άρα η } x=0 \text{ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.}$$

Οριζόντια – Πλάγια

$$\text{Έχουμε } f(x) = \frac{4 - x^2}{x} \Leftrightarrow f(x) = \frac{4}{x} - \frac{x^2}{x} \Leftrightarrow f(x) = \frac{4}{x} - x \Leftrightarrow f(x) - (-x) = \frac{4}{x}$$

$$\text{με } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = 0, \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-x)] = 0$$

οπότε από τον ορισμό της πλάγιας ασύμπτωτης η ευθεία  $y = -x$  είναι πλάγια ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $+\infty$ .

Οριζόντια ασύμπτωτη δεν έχει.

**B4.**

Για το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)}$  υπολογίζουμε πρώτα το όριο της  $f(x)$

$$\text{Έχουμε } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty.$$

$$\text{Οπότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$$

Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση  $y = \sigma\upsilon\nu(1+x^2)$  είναι φραγμένη, αφού ισχύει

$$-1 \leq \sigma\upsilon\nu(1+x^2) \leq 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ ή } |\sigma\upsilon\nu(1+x^2)| \leq 1$$

$$\text{Έχουμε } \left| \frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)} \right| = \frac{|\sigma\upsilon\nu(1+x^2)|}{|f(x)|} \leq \frac{1}{|f(x)|}. \text{ Άρα } -\frac{1}{|f(x)|} \leq \frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)} \leq \frac{1}{|f(x)|}.$$

$$\text{Επειδή } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{|f(x)|} \right) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{|f(x)|} = 0 \text{ από το κριτήριο παρεμβολής παίρνουμε } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)} = 0.$$

**ΘΕΜΑ Γ.**

**Γ1.** Η  $f$  στο  $[2,3]$  έχει τύπο  $f(x) = \frac{1}{x} + \alpha$  και η

$$y = x \cdot f(x) = x \cdot \left( \frac{1}{x} + \alpha \right) = 1 + \alpha \cdot x \text{ είναι συνεχής οπότε}$$

$$\int_2^3 x f(x) dx = \int_2^3 (1 + \alpha x) dx = \left[ x + \alpha \frac{x^2}{2} \right]_2^3 = \left( 3 + \frac{\alpha}{2} \cdot 9 \right) - \left( 2 + \alpha \cdot \frac{2^2}{2} \right) =$$

$$3 + \frac{9\alpha}{2} - 2 - \frac{4\alpha}{2} = 1 + \frac{5\alpha}{2} \text{ οπότε } 1 + \frac{5\alpha}{2} = 1 \Leftrightarrow \alpha = 0$$

**Γ2. i)** Θα αποδείξουμε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0=1$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 3x + 3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-2)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x-2) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1-x}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1-x}{x(x-1)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-1}{x} = -1$$

Άρα η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 1$  με  $f'(1) = -1$ .

ii) Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι

$$(\varepsilon): y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1) \Leftrightarrow$$

$$y - 1 = -1 \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y - 1 = -x + 1 \Leftrightarrow y = -x + 2$$

Επειδή  $f'(1) = -1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = -1 \eta \omega = 135^\circ$  αφού  $0^\circ \leq \omega < 180^\circ$ .

$$\Gamma 3. \text{ Έχουμε } f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 3, & x < 1 \\ \frac{1}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$$

Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(-\infty, 1)$  με  $f'(x) = 2x - 3$

Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(1, +\infty)$  με  $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 1$  (ερώτημα Γ2i) άρα η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  οπότε και συνεχής στο  $\mathbb{R}$ .

Στο  $(-\infty, 1)$  η  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$  (απορρίπτεται).

Στο  $(1, +\infty)$  η  $f'(x) \neq 0$

Για το πρόσημο της  $f'(x)$  έχουμε

Στο  $(-\infty, 1)$ :  $x < 1 \Rightarrow x < \frac{3}{2} \Rightarrow 2x - 3 < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$

Στο  $(1, +\infty)$ :  $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ . Επίσης  $f'(1) = -1$  άρα

$f'(x) < 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  οπότε η  $f$  γνήσια φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$  άρα και 1-1.

Για το σύνολο τιμών της:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 3x + 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

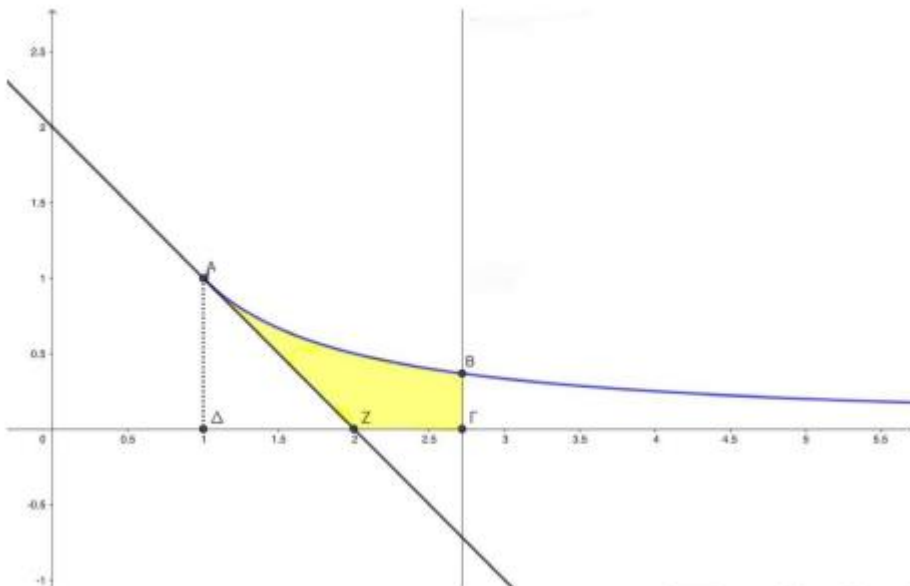
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Άρα με  $f$  γνήσια φθίνουσα παίρνουμε

$$f((-\infty, +\infty)) = \left( \lim_{+\infty} f(x), \lim_{-\infty} f(x) \right) = (0, +\infty)$$

Γ4. Ζητείται εμβαδόν ενός χωρίου που ορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις τριών συναρτήσεων, της  $f$

$f(x) = \frac{1}{x}$ , της  $(\varepsilon): y = -x + 2$  και του  $x'$  άξονα δηλαδή της  $y = 0$ . Θα κάνουμε σχήμα.



Είναι:  $A(1,1), \Delta(1,0), \Gamma(e,0), Z(2,0)$

Το  $E(\Omega)$  είναι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου.

Το ζητούμενο εμβαδό θα το υπολογίσουμε ως τη διαφορά του  $(A\Delta Z)$  από το εμβαδό  $(A\Delta\Gamma B)$ .

$$\text{Έχουμε } (A\Delta\Gamma B) = \int_1^e f(x) dx = \int_1^e \frac{1}{x} dx = [\ln|x|]_1^e = [\ln x]_1^e =$$

$$\ln e - \ln 1 = 1 \text{ τ.μ.}$$

$$(A\Delta Z) = \frac{1}{2} \cdot (\Delta Z) \cdot (A\Delta) = \frac{1}{2} \cdot (2-1) \cdot 1 = \frac{1}{2} \text{ τ.μ.}$$

$$\text{Άρα } E(\Omega) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ τ.μ.}$$

### ΘΕΜΑ Δ

#### Δ.1.

Για  $x \in (0,2)$  και  $x \neq 1$  θέτουμε  $g(x) = \frac{f(x) - 2x}{x-1}$  οπότε  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \ell$ .

Έχουμε  $f(x) - 2x = (x-1) \cdot g(x) \Leftrightarrow f(x) = 2x + (x-1) \cdot g(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} [2x + (x-1) \cdot g(x)] = 2 + 0 \cdot \ell = 2$

$$\text{Επίσης, } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left[ \ln(2-x) - \frac{1}{x} + x \right] = \ln 1 - 1 + 1 = 0$$

$$\text{Άρα } 0 = 2 \Leftrightarrow \kappa = 3, \text{ οπότε } f(x) = \ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3, x \in (0,2)$$

#### Δ2.

Η  $f$  είναι συνεχής στο  $(0,2)$  ως άθροισμα συνεχών και παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = \frac{1}{2-x} \cdot (2-x)' + \frac{1}{x^2} = \frac{-1}{2-x} + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 + x - 2}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -2 \text{ (απορρ.)}$$

Για το πρόσημο της  $f'(x)$  έχουμε

$x$		0	1	2
$x^2 + x - 2$		-	0	+
$x - 2$		-	0	-
$x^2$		+	+	+
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		↗	OM	↘

$$f(1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3 \right) = -\infty \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \text{ και } \ln 2 + 3 \in \mathbb{R}.$$

Ακόμη

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left( \ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3 \right) = -\infty \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \ln(2-x) = \left( \text{θέτω } 2-x = u \text{ οπότε } u \rightarrow 0^+ \right) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty$$

Οπότε με  $f$  γνήσια αύξουσα στο  $(0,1]$ :  $f((0,1]) = \left( \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), f(1) \right] = (-\infty, 2]$ .

Το  $0 \in (-\infty, 2]$  οπότε θα υπάρχει τουλάχιστον ένα  $x_1 \in (0,1)$  ώστε  $f(x_1) = 0$  και αφού η  $f$  γνήσιως αύξουσα στο  $(0,1)$  το  $x_1$  μοναδικό με  $x_1 < 1$ .

$$f((1,2)) = \left( \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \right) = (-\infty, 2).$$

Το  $0 \in (-\infty, 2]$  οπότε θα υπάρχει τουλάχιστον ένα  $x_2 \in (1,2)$  ώστε  $f(x_2) = 0$  και αφού  $f$  γνήσιως φθίνουσα στο  $(1,2)$  το  $x_2$  μοναδικό με  $x_2 > 1$ .

Άρα η  $f(x)=0$  έχει ακριβώς 2 ρίζες  $x_1, x_2$  με  $x_1 < 1 < x_2$ .

$$\text{Επειδή } f\left(\frac{1}{3}\right) = \ln\left(2 - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{\frac{1}{3}} + 3 = \ln\frac{5}{3} - 3 + 3 = \ln 5 - \ln 3 > 0, \text{ άρα η ρίζα } x_1 < \frac{1}{3}.$$

Σημείωση:

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε: } 5 > 3 &\stackrel{y=\ln x \uparrow}{\Rightarrow} \ln 5 > \ln 3 \Rightarrow \\ &\ln 5 - \ln 3 > 0 \end{aligned}$$

**Δ3.**

$$\text{Θα δείξουμε ότι υπάρχει } \xi \in (0,1) \text{ ώστε } f'(\xi) = \frac{3 \cdot f\left(\frac{1}{3}\right)}{1 - 3x_1}.$$

Αφού  $x_1 < \frac{1}{3}$ , ορίζεται το διάστημα  $\left[x_1, \frac{1}{3}\right]$ .

Η  $f$  είναι συνεχής στο  $\left[x_1, \frac{1}{3}\right]$  ως πράξεις συνεχών.

Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\left(x_1, \frac{1}{3}\right)$ .

Άρα από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi \in \left(x_1, \frac{1}{3}\right) \subseteq (0,1)$  τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right) - f(x_1)}{\frac{1}{3} - x_1} \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right) - 0}{\frac{1 - 3x_1}{3}} \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{3 \cdot f\left(\frac{1}{3}\right)}{1 - 3x_1}$$

Ακόμη

$$f''(x) = -\frac{1}{(x-2)^2} - \frac{2}{x^3} < 0.$$

Άρα η  $f'$  είναι γνήσιως φθίνουσα άρα το  $\xi$  είναι μοναδικό.

**Δ4.**

i. Αφού  $F, G$  αρχικές συναρτήσεις της  $f$  στο  $(0,2)$  θα ισχύουν

$$F'(x) = f(x), G'(x) = f(x) \text{ και } F(x) = G(x) + C$$

$$H(1) \text{ για } x = x_1 : F(x_1) = G(x_1) + C \Leftrightarrow 0 = G(x_1) + C \Leftrightarrow$$

$$C = -G(x_1).$$

$$H(1) \text{ για } x = x_2 : F(x_2) = G(x_2) + C \Leftrightarrow F(x_2) = 0 + C$$

$$\Leftrightarrow F(x_2) = C$$

$$\text{Έτσι: } -G(x_1) = F(x_2) \Leftrightarrow F(x_2) + G(x_1) = 0$$

$$\text{ii. Θεωρώ } h(x) = x_1 \cdot F(x) + x_2 \cdot G(x) + 2x - x_1 - x_2, x \in [x_1, x_2].$$

Η  $h$  είναι συνεχής στο  $[x_1, x_2]$  ως πράξεις συνεχών, αφού  $F(x), G(x)$  είναι συνεχείς ως παραγωγίσιμες.

$$\begin{aligned} h(x_1) &= x_1 \cdot F(x_1) + x_2 \cdot G(x_1) + 2x_1 - x_1 - x_2 = x_2 \cdot G(x_1) + x_1 - x_2 = \\ &= -x_2 F(x_2) + x_1 - x_2 \text{ αφού } G(x_1) = -F(x_2) \end{aligned}$$

$$h(x_2) = x_1 F(x_2) + x_2 G(x_2) + 2x_2 - x_1 - x_2 = x_1 \cdot F(x_2) + x_2 - x_1$$

Είναι  $F'(x) = f(x)$  για κάθε  $x \in (0, 2)$  οπότε  $x_1 < x < 1 \Rightarrow f(x_1) < f(x) \Rightarrow 0 < f(x)$  και

$1 < x < x_2 \Rightarrow f(x) > f(x_2) \Rightarrow f(x) > 0$  οπότε η  $f(x) > 0$  στο  $(x_1, x_2) \Rightarrow F'(x) > 0$  στο  $(x_1, x_2)$  οπότε  $F \uparrow$  στο  $(x_1, x_2)$ .

$$\text{Για } x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) < F(x_2) \Rightarrow 0 < F(x_2)$$

Άρα,  $-x_2 F(x_2) < 0$  και επειδή  $x_1 - x_2 < 0$  έχουμε  $h(x_1) < 0$ .

Επίσης  $x_1 F(x_2) > 0, x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow h(x_2) > 0$ .

Άρα  $h(x_1) \cdot h(x_2) < 0$  οπότε από Θεώρημα Bolzano έχουμε ότι υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της  $h(x) = 0$  στο  $(x_1, x_2)$ .

Για την μοναδικότητα:

$$h'(x) = x_1 \cdot F'(x) + x_2 \cdot G'(x) + 2 =$$

$$= x_1 f(x) + x_2 f(x) + 2 > 0 \text{ για κάθε } x \in (x_1, x_2).$$

Άρα η  $h$  γν. αύξουσα στο  $[x_1, x_2]$  οπότε η ρίζα που εξασφαλίσαμε με το Θ. Bolzano είναι μοναδική